Glava 6

Diferencijalne jednačine

6.1 Uvod

6.1.1 Osnovni pojmovi

Neka je F realna funkcija $n+2$ promjenljive. Jednačina

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad x \in (a, b), \tag{6.1}$$

gdje je y nepoznata $n-$puta diferencijabilna funkcija, naziva se **diferencijalnom jednačinom** reda n ako se u njoj obavezno pojavljuje funkcija $y^{(n)}$.
Ako je diferencijalna jednačina data u obliku

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{6.2}$$

kažemo da ima **normalni oblik**.

Opšte rješenje diferencijalne jednačine (6.1) je svaka funkcija

$$y = y(x), \quad x \in (a, b)$$

koja je data sa

$$G(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{6.3}$$

gdje su $C_1, \ldots, C_n$ konstante tako da važi

- $y = y(x)$ je rješenje jednačine (6.1) na (a, b), to jest za $y = y(x)$ jednačina (6.1) postaje identitet na (a, b),
- eliminacijom konstanti $C_1, \ldots, C_n$ iz (6.3) i izvodnih jednakosti do reda n dobijamo samo diferencijalnu jednačinu (6.1).

Partikularno rješenje je svako rješenje koje se dobija iz opšteg rješenja za konkretne vrijednosti bar jedne od konstanti $C_1, \ldots, C_n$.

Singularno rješenje je rješenje koje se ne može dobiti iz opšteg rješenja ni za jednu vrijednost konstanti $C_1, \ldots, C_n$.

Integralna kriva diferencijalne jednačine je svako njeno partikularno ili singularno rješenje posmatrano kao kriva $y = y(x)$.
Uslovi

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \tag{6.4}$$

se nazivaju **početni uslovi**. Problem (6.2), (6.4) se naziva **Košijev početni problem** reda n.
Problem

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{6.5}$$

je **Košijev početni problem prvog reda**.

Napomenimo da se pored Košijevog početnog problema u teoriji diferencijalnih jednačina izučavaju i **granični problemi**. Granični problemi su komplikovaniji, a kao ilustraciju navodimo granični problem drugog reda.
Problem

$$\begin{aligned} y'' &= f(x,y,y') \\ y(a) = A,&\ y(b) = B, \end{aligned} \tag{6.6}$$

gdje su a i b krajnje tačke posmatranog intervala, a A i B dati realni brojevi se naziva **granični problem drugog reda**.

Na kraju ove sekcije recimo i to da diferencijalne jednačine opisuju razne prirodne pojave. Tako na primjer, jednačina

$$y' = ky,$$

predstavlja model za Maltusov[1] zakon porasta populacije, dok su rješenja Ermitove[2] jednačine

$$y'' - 2xy' + 2py = 0,$$

talasne funkcije kvantne mehanike.

6.1.2 Egzistencija i jedinstvenost rješenja

U ovoj sekciji bavićemo se pitanjem egzistencije i jedinstvenosti rješenja diferencijalne jednačine prvog reda. Tačnije, bavićemo se pitanjem egzistencije i jedinstvenosti rješenja Košijevog problema (6.5).

DEFINICIJA 6.1. *Neka je dat niz funkcija $\{f_n(x)\}$ definisanih na nekom intervalu $[a,b]$. Ako važi*

$$|f_n(x)| \le M \text{ za sve } x \in [a,b] \text{ i sve } n \in \mathbb{N},$$

*kažemo da je niz $\{f_n(x)\}$ **uniformno ograničen**. Ako za za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da vrijedi*

$$|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \epsilon \text{ za sve } x_1, x_2 \in [a,b], n \in \mathbb{N},$$

*kažemo da je niz $\{f_n(x)\}$ **podjednako neprekidan**.*

[1] Thomas Robert Malthus (1766–1834), engleski demograf.
[2] Charles Hermite (1822–1901), francuski matematičar.

Sljedeća teorema je poznata kao teorema Arcela[3] i Askolija[4]

TEOREMA 6.1. *Niz neprekidnih funkcija $\{f_n(x)\}$ definisanih na $[a,b]$ ima konvergentan podniz ako i samo ako je uniformno ograničen i podjednako neprekidan.*

Sljedeća teorema daje dovoljne uslove za egzistenciju rješenja Košijevog početnog probelma prvog reda.

TEOREMA 6.2. ***Peanova teorema.*** *Neka je funkcija f neprekidna u oblasti*

$$D = \{(x,y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

tada Košijev problem (6.5) ima bar jedno rješenje definisano na $[x_0 - h, x_0 + h]$, gdje je $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$ i $M = \sup\limits_D |f(x,y)|$.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da jednačina

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{6.7}$$

ima rješenje na segmentu $[x_0 - h, x_0 + h]$.

Definisaćemo niz $\{y_n(x)\}$ podjednako neprekidnih i uniformno ograničenih funkcija na $[x_0, x_0 + h]$ na sljedeći način:

$$y_n(x) = y_0, \; x \in \left[x_0, x_0 + \frac{h}{n}\right],$$

$$y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x-\frac{h}{n}} f(t, y_n(t))dt, \; x \in \left[x_0 + \frac{kh}{n}, x_0 + \frac{(k+1)h}{n}\right],$$

za $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Članovi niza $\{y_n(x)\}$ su dobro definisani. Naime, indukcijom se lako zaključuje da vrijedi

$$|y_n(x) - y_0| \leq b, \tag{6.8}$$

pa za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $(x, y_n(x)) \in D$.

Osim toga iz (6.8) slijedi

$$|y_n(x)| \leq b + |y_0|, \; n \in \mathbb{N}, \; x \in [x_0, x_0 + h],$$

[3]Cesare Arzel (1847–1912), italijanski matematičar.
[4]Giulio Ascoli (1843–1896), italijanski matematičar.

pa je niz $\{y_n(x)\}$ uniformno ograničen.

Dalje, iz

$$|y_n(x_1) - y_n(x_2)| \leq \left| \int\limits_{x_2 - \frac{h}{n}}^{x_1 - \frac{h}{n}} f(t, y_n(t))dt \right| \leq M|x_1 - x_2|,$$

zaključujemo da je posmatrani niz podjednako neprekidan. Na osnovu teoreme Arzela i Ascolija niz $\{y_n(x)\}$ sadrži konvergentan podniz $\{y_{n_k}(x)\}$ koji konvergira uniformno ka nekoj funkciji $z(x)$. Pokazaćemo da je funkcija $z(x)$ traženo rješenje. Vrijedi sljedeće

$$y_{n_k}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n_k}(t))dt - \int\limits_{x - \frac{h}{n_k}}^{x} f(t, y_{n_k}(t))dt.$$

Dalje,

$$\lim_{k \to +\infty} \int\limits_{x - \frac{h}{n_k}}^{x} f(t, y_{n_k}(t))dt = 0,$$

jer

$$\left| \int\limits_{x - \frac{h}{n_k}}^{x} f(t, y_{n_k}(t))dt \right| \leq \frac{M}{hn_k}.$$

Osim toga

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n_k}(t))dt = \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))dt,$$

jer je funkcija f uniformno neprekidna na intervalu $[x_0, x_0 + h]$. Na taj način smo pokazali egzistenciju rješenja jednačine (6.7) odnosno Košijevog problema (6.5) na $[x_0, x_0 + h]$, za interval $[x_0 - h, x_0]$ dokaz se izvodi na sličan način. $\square$

Vidjeli smo da neprekidnost funkcije f obezbjeđuje egzistenciju rješenja problema (6.5). Prirodno pitanje je kada je rješenje Košijevog problema jedinstveno. Sljedeći primjer pokazuje da neprekidnost funkcije f nije dovoljan uslov da bi rješenje bilo jedinstveno.

Primjer 248.

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}},\ y(0) = 0.$$

Lako je provjeriti da su rješenja datog problema na primjer funkcije

$$y_1(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$$

i

$$y_2(x) = \begin{cases} (x+1)^3, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^3, & x > 1. \end{cases}$$

Ako se za funkciju f uvedu pored neprekidnosti i dodatni uslovi (Lipšicov[5] uslov) može se obezbjediti i jedinstvenost rješenja Košijevog problema (6.5). Sljedeći rezultat je poznat kao teorema **Pikara**[6] **i Lindelefa**[7].

TEOREMA 6.3. *Neka je funkcija f neprekidna u oblasti*

$$D = \{(x, y) : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}$$

i zadovoljava Lipšicov uslov po y, tj postoji konstanta $L > 0$ takva da je

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \ \textit{za sve}\ (x, y_1), (x, y_2) \in D,$$

tada Košijev problem (6.5) *ima tačno jedno rješenje definisano na* $[x_0 - h, x_0 + h]$, *gdje je* $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$ *i* $M = \sup\limits_D |f(x, y)|$.

Dokaz. Kao i u dokazu Peanove teoreme dovoljno je pokazati da jednačina (6.7) ima jedinstveno rješenje na segmentu $[x_0 - h, x_0 + h]$.
Pokažimo prvo egzistenciju rješenja. Definišimo niz funkcija $\{y_n(x)\}$ na sljedeći način:

$$y_0(x) = y_0,\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt,\ n \in \mathbb{N}. \tag{6.9}$$

Niz $\{y_n(x)\}$ je dobro definisan.
Naime,

$$|y_n(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt\right| \le M|x_0 - x| \le Mh \le b$$

$$\text{za sve } x \in [x_0 - h, x_0 + h],\ n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, $(x, y_n(x)) \in D$ za sve $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $n \in \mathbb{N}$.
Dalje, indukcijom dobijamo

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le \frac{ML^{n-1}|x - x_0|^n}{n!},\ x \in [x_0 - h, x_0 + h],\ n \in \mathbb{N}. \tag{6.10}$$

Sada imamo

$$|y_{n+p}(x) - y_n(x)| \le \sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{ML^{i-1}|x - x_0|^i}{i!},$$

odnosno

$$|y_{n+p}(x) - y_n(x)| \le \frac{ML^n|x - x_0|^{n+1}}{L(n+1)!}$$

$$\times\left(1 + \frac{L|x - x_0|}{n+2} + \frac{(L|x - x_0|)^2}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{(L|x - x_0|)^p}{(n+2)\cdots(n+p)}\right).$$

[5]Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903), njemački matematičar.
[6]Charles Émile Picard (1856–1941), francuski matematičar
[7]Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946, Helsinki), finski matematičar

Dakle,

$$|y_{n+p}(x) - y_n(x)| \leq \frac{ML^n|x-x_0|^{n+1}}{Ln!} \frac{1}{1 - \frac{L|x-x_0|}{n+2}}. \tag{6.11}$$

Ako u posljednjoj nejednakosti pustimo da $n, p \to +\infty$ dobijamo, na osnovu Košijevog kriterijuma, da niz funkcija $\{y_n(x)\}$ uniformno konvergira.
Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n(x) = z(x)$. Tada zbog (6.11) imamo

$$|z(x) - y_n(x)| \leq \frac{ML^n|x-x_0|^{n+1}}{L(n+1)!} \frac{n+2}{n+2-L|x-x_0|}, \; n \geq n_0.$$

Pokažimo da je $z(x)$ rješenje Košijevog problema (6.5).
Vrijedi sljedeće

$$\left| z(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))dt \right| = \left| z(x) - y_n(x) + \int_{x_0}^{x} (f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, z(t)))dt \right|,$$

pa je

$$\left| z(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))dt \right| \leq |y_n(x) - z(x)| + L \left| \int_{x_0}^{x} (y_{n-1}(t) - z(t))dt \right|.$$

Neka je $\epsilon > 0$, tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$|y_n(x) - z(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ za sve } n \geq n_0$$

i

$$|y_{n-1}(x) - z(x)| \leq \frac{\epsilon}{2Lh} \text{ za sve } n \geq n_0.$$

Dakle, imamo

$$\left| z(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))dt \right| \leq \frac{\epsilon}{2} + L \int_{x_0}^{x} \frac{\epsilon}{2Lh}dt \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2Lh}|x - x_0| \leq \epsilon.$$

Znači,

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))dt.$$

Pokažimo da je z jedinstveno rješenje.
Neka su z_1 i z_2 dva različita rješenja problema (6.5). Stavimo

$$g(x) = (z_1(x) - z_2(x))^2, \; x \in [x_0, x_0 + h].$$

Imamo

$$g'(x) = 2(z_1(x) - z_2(x))(z_1'(x) - z_2'(x)),$$

pa je

$$|g'(x)| \leq 2Lg(x).$$

Odavde je

$$\left(g(x)e^{-2L(x-x_0)}\right)' \leq 0 \text{ za sve } x \in [x_0, x_0+h],$$

pa integracijom slijedi

$$g(x) \leq g(x_0) \text{ za sve } x \in [x_0, x_0+h].$$

Dakle, $g(x) = 0$ za sve $x \geq x_0$.
Ako je $x \leq x_0$ stavimo $t = 2x_0 - x$ i ponovimo prethodni postupak. □

Napomena 6.1. Metod opisan u dokazu prethodne teoreme poznat je kao metod sukcesivnih aproksimacija.

Primjer 249.

$$y'(x) = y^2 - x^2 + 1, \; y(0) = 0.$$

Koristeći metod sukcesivnih aproksimacija dobijamo

$$y_0(x) = 0, \; y_n(x) = \int_0^x (y_{n-1}^2(t) - t^2 + 1)dt, \; n \in \mathbb{N}.$$

Za prva tri člana niza $\{y_n(x)\}$ imamo:

$$y_1(x) = \int_0^x (1-t^2)dt = x - \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left[\left(t - \frac{t^3}{3}\right)^2 - t^2 + 1\right] dt = x - \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left[\left(t - \frac{2t^5}{15} + \frac{t^7}{63}\right)^2 - t^2 + 1\right] dt = x - \frac{4x^7}{105} + \frac{2x^9}{567} +$$

$$+\frac{4x^{11}}{2457} - \frac{4x^{13}}{12285} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

Koristeći indukciju pokazuje se

$$y_n(x) = x + o(x^{2n+1}),$$

pa važi

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(x) = x.$$

Prema tome jedno rješenje datog problema je funkcija $y(x) = x$.

Primjeri u kojima se može naći rješenje na ovaj način su rijetki. Ipak, metod sukcesivnih aproksimacija je značajan zbog efikasnog korištenja u teorijske svrhe.

Primjer 250. Pokazati da pri uslovima teoreme 6.3 za niz sukcesivnih aproksimacija (6.9) i rješenje $z(x)$ problema (6.5) važi nejednakost

$$|z(x) - y_n(x)| \leq M\frac{L^n h^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h], n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.12}$$

Rješenje. Formirajmo red

$$y_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}[y_n(x) - y_{n-1}(x)], \tag{6.13}$$

njegova $n-$ta parcijalna suma je $y_n(x)$. Prema nejednakosti (6.10), opšti član reda (6.13) se može majorirati opštim članom konvegentnog reda, pa po Vajerštrasovom kriterijumu ovaj red uniformno konvergira ka nekoj funkciji $z(x)$, pa i funkcionalni niz $\{y_n(x)\}, x \in [x_0-h, x_0+h]$ uniformno konvergira ka funkciji $z(x)$. Zbog neprekidnosti članova ovog niza, funkcija $z(x)$ je neprekidna, pa je $z(x)$ neprekidno rješenje integralne jednačine (6.9). Koristeći Lipšicov uslov, imamo

$$\begin{aligned} |z(x) - y_n(x)| &\leq \left|\int_{x_0}^{x}[f(t, z(t)) - f(t, y_{n-1}(t))]dt\right| \\ &\leq L\int_{x_0}^{x}|z(t) - y_{n-1}(t)|dt. \end{aligned}$$

Iz ove nejednakosti, matematičkom indukcijom dobijamo nejednakost (6.12). Za $n = 0$,

$$|z(x) - y_0(x)| \leq \left|\int_{x_0}^{x} f(t, z(t))dt\right| \leq M|x - x_0|,$$

iz induktivne pretpostavke

$$|z(x) - y_n(x)| \leq M\frac{L^n|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

slijedi

$$|z(x) - y_{n+1}(x)| \leq L\int_{x=x_0}^{x} M\frac{L^n|t - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = M\frac{L^{n+1}|x - x_0|^{n+2}}{(n+2)!}.$$

6.2 Diferencijalne jednačine prvog reda

Diferencijalne jednačine čija se rješenja mogu izraziti pomoću konačnog broja elementarnih funkcija i njihovih integrala su malobrojne. Ipak, te jednačine su značajne, jer su prva saznanja o diferencijalnim jednačinama nastala od proučavanja upravo tih tipova diferencijalnih jednačina. Prilikom njihovog rješavanja uvijek se koristila integracija, pa se takve diferencijalne jednačine nazivaju integrabilne diferencijalne jednačine.

6.2.1 Jednačina sa razdvojenim promjenljivim

Jednačina oblika

$$\boxed{f(x)dx + g(y)dy = 0, \qquad (6.14)}$$

gdje su f i g neprekidne funkcije na (a, b) naziva se jednačinom sa razdvojenim promjenljivim. Opšte rješenje jednačine (6.14) je

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C.$$

Primjer 251. Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$(x^2+1)y' = y^2+1,$$

Rješenje. Datu jednačinu možemo pisati u obliku

$$\frac{dy}{1+y^2} - \frac{dx}{1+x^2} = 0,$$

odakle je

$$\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x = C,$$

pa je

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg} C.$$

Ako stavimo $C_1 = \operatorname{tg} C$ i iskoristimo formulu

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

dobijamo

$$\frac{y-x}{1+xy} = C_1.$$

Dakle, opšte rješenje je

$$(1+xy)C_1 - y + x = 0.$$

Primjer 252. Naći funkciju f koja zadovoljava sljedeću funkcionalnu jednačinu

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}, \qquad (6.15)$$

ako se zna da postoji $f'(0)$.
Rješenje. Kako postoji $f'(0)$, funkcija f je definisana i neprekidna u nekoj okolini tačke $x = 0$. Ako u (6.15) uvrstimo $y = 0$ dobijamo

$$(1+f^2(x))f(0) = 0,$$

odakle je $f(0) = 0$. Kako je zbog (6.15)

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(y)}{y} \cdot \frac{1 + f^2(x)}{1 - f(x)f(y)},$$

kada pustimo $y \to 0$ dobijamo

$$f'(x) = f'(0)(1 + f^2(x)),$$

a ovo je jednačina sa razdvojenim promjenljivim. Njeno opšte rješenje je

$$f(x) = \mathrm{tg}(f'(0)x + C).$$

6.2.2 Homogena jednačina

Homogena diferencijalna jednačina je

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (6.16)}$$

gdje je f neprekidna funkcija na (a, b).
Ako je

$$f(t) = t, \quad \text{za sve } t \in (a, b),$$

tada imamo jednačinu sa razdvojenim promjenljivim

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Njeno opšte rješenje je

$$y = Cx.$$

Ako je

$$f(t_0) = t_0, \quad \text{za neko } t_0 \in (a, b),$$

tada je funkcija $y(x) = t_0 x + C$ rješenje jednačine (6.16).
Na kraju prepostavimo da je

$$f(t) \neq t, \quad \text{za sve } t \in (a, b).$$

Uvodeći smjenu

$$z(x) = \frac{y(x)}{x},$$

dobijamo

$$y'(x) = z(x) + xz'(x),$$

pa jednačina (6.16) postaje

$$z + xz' = f(z),$$

to jest jednačina sa razdvojenim promjenljivim

$$\frac{dz}{z-f(z)} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Njeno opšte rješenje je

$$Cx = \exp\left(\int \frac{dz}{z-f(z)}\right).$$

Napomena 6.2. Jednačina

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

u slučaju da je

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

se smjenom

$$x = u+\alpha,\ y = v+\beta$$

svodi na homogenu jednačinu, gdje su α i β takvi da je

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$$

$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0.$$

U slučaju da je

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

onda se data jednačina smjenom $u = a_1x + b_1y$ svodi na homogenu.

Primjer 253. Riješiti jednačinu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{-x+y+1}.$$

Rješenje. Kako je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

koristimo smjenu

$$x = u+\alpha,\ y = v+\beta,$$

gdje je

$$\alpha+\beta-3 = 0$$

$$-\alpha+\beta+1 = 0.$$

Dakle,

$$x = u+2,\ y = v+1,$$

pa imamo

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{-u+v},$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{1+\frac{v}{u}}{-1+\frac{v}{u}}.$$

Koristeći smjenu $v = zu$ dobijamo

$$\frac{z-1}{1+2z-z^2}dz - \frac{du}{u} = 0.$$

Odavde slijedi

$$u^2(1+2z-z^2) = C,$$

pa je

$$x^2 + 2xy - y^2 - 6x - 2y = C_1, \ (C - 7 = C_1).$$

Napomena 6.3. Nekada se jednačina smjenom $y = z^m$ može svesti na homogenu. Broj m je obično nepoznat. Da bi ga našli, treba da dobijena jednačina nakon ove smjene bude homogena, ako je to moguće.

Primjer 254. Riješiti jednačinu

$$2x^2y' = y^3 + xy. \tag{6.17}$$

Rješenje. Odredimo m tako da se smjenom $y = z^m$ jednačina (6.17) transfoformiše u homogenu. Dobijamo

$$2mx^2z^{m-1}z' = z^{3m} + xz^m,$$

da bi ova jednačina bila homogena potrebno je da važi

$$2 + (m-1) = 3m = 1 + m,$$

pa je $m = \dfrac{1}{2}$. Prema tome, imamo homogenu jednačinu

$$z' = \frac{z}{x} + \left(\frac{z}{x}\right)^2.$$

Rješavajući ovu jednačinu i vraćajući y dobijamo opšte rješenje jednačine (6.17)

$$x = -y^2 \ln Cx.$$

Jednačina (6.17) ima singularno rješenje $y = 0$.

pa imamo

$$c(x) = c + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

što implicira (6.19).

III Metoda neodređenih funkcija (Bernuli).
Rješenje se traži u obliku proizvoda dvije funkcije $u(x)$ i $v(x)$. Kako je

$$u(x)'v(x) + u(x)[v'(x) + p(x)v(x)] = q(x),$$

odredimo $v(x)$ iz uslova $v'(x) + p(x)v(x) = 0$. Dobijamo da je

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Kako je $u'(x)v(x) = q(x)$, važi

$$u(x) = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Množenjem funkcija $u(x)$ i $v(x)$ dobijamo opšte rješenje (6.19).

Primjer 255. Riješti jednačinu $xy' + y = x^a, x > 0, a \in \mathbb{R}$.
Rješenje. Iz formule (6.19) dobijamo

$$y = \frac{1}{x}\left(c - \int x^a dx\right) = \begin{cases} \dfrac{c}{x} - \dfrac{x^a}{a+1}, & a \neq -1, \\ \dfrac{c - \ln x}{x}, & a = -1. \end{cases}$$

Primjer 256. Riješiti jednačinu $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{xf(y) + g(y)}$.
Rješenje. Datu jednačinu možemo pisati u obliku

$$\frac{dx}{dy} - xf(y) = g(y),$$

a ovo je linearna jednačina u odnosu na inverznu funkciju $x = x(y)$ tražene funkcije $y = y(x)$. Koristeći formulu (6.19) dobijamo

$$x = e^{\int f(y)dy}\left(C + \int g(y)e^{-\int f(y)dy}dy\right).$$

Primjer 257. Naći opšte rješenje diferencijalne jednačine

$$(2x + 1)y' - 4e^{-y} + 2 = 0.$$

Rješenje. Množenjem jednačine sa e^y dobijamo

$$(2x + 1)y'e^y - 4 + 2e^y = 0.$$

6.2.3 Linearna jednačina prvog reda

Diferencijalna jednačina

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x), \qquad (6.18)}$$

gdje su p i q neprekidne funkcije na (a, b) naziva se linearnom jednačinom prvog reda. Ako je $q(x) = 0, x \in (a, b)$, jednačina (6.18) je homogena linearna diferencijalna jednačina. Opšte rješenje jednačine (6.18) je

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right). \qquad (6.19)}$$

Linearna diferencijalna jednačina se može rješavati na više načina. Izložićemo tri postupka za rješavanje.

I Metoda integracionog faktora (Ojler).
Iz (6.18), moženjem sa $e^{\int p(x)dx}$ imamo

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

to jest

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

pa je

$$ye^{\int p(x)dx} = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx},$$

a odavde slijedi (6.19).

II Metoda varijacije konstanti (Lagranž).
Opšte rješenje homogene linearne jednačine

$$y' + p(x)y = 0,$$

je $y = ce^{-\int p(x)dx}$. Variramo konstantu c neprekidno diferencijabilnom funkcijom $c(x)$, tako da funkcija

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx},$$

bude rješenje jednačine (6.18). Kako je

$$y' + px(x)y = c'(x)e^{-\int p(x)dx},$$

dobijamo da je

$$c'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

Uvodeći smjenu $z(y) = e^y$, dobijamo linearnu jednačinu

$$(2x+1)z' + 2z = 4.$$

Njeno opšte rješenje je

$$z(x) = \frac{C+4x}{2x+1},$$

pa je opšte rješenje polazne jednačine

$$(2x+1)e^y = C + 4x.$$

6.2.4 Bernulijeva jednačina

Diferencijalna jednačina oblika

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \qquad (6.20)}$$

gdje su p i q neprekidne funkcije na (a, b), a $\alpha \in \mathbb{R}$ je Bernulijeva jednačina. Za $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$ to je linearna diferencijalna jednačina. Pretpostavimo da je $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq 1$. Uvedimo smjenu

$$y = z^k, \ k \neq 0.$$

Jednačina (6.20) tada postaje

$$kz'z^{k-1} + p(x)z^k = q(x)z^{\alpha k},$$

pa je

$$z + \frac{p(x)}{k}z = \frac{q(x)}{k}z^{\alpha k - k + 1}.$$

Posljednja jednačina je linearna za

$$\alpha k - k + 1 = 0,$$

to jest za

$$k = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Dakle, smjenom

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

jednačina (6.20) se svodi na linearnu.

Primjer 258. Riješiti jednačinu $y' + 2y = e^x y^2$.
Rješenje. Ovde je $\alpha = 2$, pa koristimo smjenu $y = z^{-1}$. Sada dobijamo

$$-z^{-2}z' + 2z^{-1} = e^x z^{-2},$$

odavde je

$$z' - 2z = -e^x,$$

a ovo je linearna diferencijalna jednačina. Njeno opšte rješenje je

$$z = e^x + Ce^{2x}.$$

Dakle, opšte rješenje date jednačine je

$$y = \frac{1}{Ce^{2x} + e^x}.$$

Primjer 259. Jednačina oblika

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy + P(x,y)(xdy - ydx) = 0, \tag{6.21}$$

gdje su M i N homogene funkcije stepena homogoniteta α, a P homogena funkcija stepena homogoniteta β, tj, važi

$$M(tx,ty) = t^\alpha M(x,y), \quad N(tx,ty) = t^\alpha N(x,y), \quad P(tx,ty) = t^\beta P(x,y),$$

naziva se Darbuova[8] diferencijalna jednačina.

- Ako je $\beta - \alpha + 2 \neq 0$ i $\beta - \alpha + 1 \neq 0$, jednačina (6.21) se smjenom $y(x) = xz(x)$, gdje je $z(x)$ nova nepoznata funkcija, svodi na Bernulijevu diferencijalnu jednačinu.

- Ako je $\beta - \alpha + 2 = 0$, jednačina (6.21) je linearna.

- Ako je $\beta - \alpha + 1 = 0$, jednačina (6.21) je homogena.

Odrediti opšte rješenje jednačine $(x^2 - y^2)dx + xydy + yx^2(xdy - ydx) = 0$.
Rješenje. Ovde je $\alpha = 2, \beta = 3$, pa smjenom $y = xz$ dobijamo Bernulijevu jednačinu,

$$x' + zx = -zx^3.$$

Ova jednačina se smjenom $x^{-2} = v$ transformiše u linearnu

$$v' - 2zv = 2z,$$

koja ima opšte rješenje $v = Ce^{\frac{y^2}{x^2}} - 1$. Opšte rješenje date jednačine je

$$\frac{1}{x^2} = Ce^{\frac{y^2}{x^2}} - 1.$$

[8] Jean-Gaston Darboux (1842–1917), francuski matematičar.

6.2.5 Rikatijeva jednačina

Diferencijalna jednačina

$$\boxed{y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0, \qquad (6.22)}$$

gdje su p, q i r neprekidne funkcije definisane na (a, b) naziva se Rikatijeva[9] jednačina. Ako su funkcije p, q i r konstante, (6.22) je jednačina sa razdvojenim promjenljivim i njeno opšte rješenje je

$$C - x = \int \frac{dy}{py^2 + qu + r}.$$

Jednačina (6.22) u opštem slučaju se ne može riješiti pomoću konačnog broja integracija. U slučaju da je poznato jedno njeno partikularno rješenje y_1, Rikatijeva jednačina se može riješiti koristeći smjenu

$$y(x) = y_1(x) + z(x).$$

Tada (6.22) postaje

$$y_1' + z' + p(x)(y_1^2 + 2y_1 z + z^2) + q(x)(y_1 + z) + r(x).$$

Kako je y_1 rješenje date jednačine dobijamo

$$z' + p(x)(2y_1 + z^2) + q(x)z = 0,$$

to jest

$$z' + (2p(x)y_1 + q(x))z = -p(x)z^2,$$

a ovo je Bernulijeva diferencijalna jednačina.

Primjer 260. Riješiti jednačinu $y' - y^2 + 2e^x y = e^{2x} + e^x$, ako je njeno partikularno rješenje $y_1 = e^x$.
Rješenje. Koristeći smjenu

$$y = e^x + z$$

dobijamo

$$z' = z^2.$$

Odavde je

$$-\frac{1}{z} = x - C,$$

pa imamo

$$z = \frac{1}{C - x}.$$

Opšte rješenje date jednačine je

$$y = e^x + \frac{1}{C - x}.$$

[9]Jacopo Francesco Riccati (1676–1754), italijanski matematičar.

Napomena 6.4. Smjenom

$$y = y_1 + \frac{1}{z},$$

jednačina (6.22) se svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu

$$z' - (2p(x)y_1 + q(x))y = p(x).$$

Pretpostavimo sada da su y_1 i y_2 dva partikularna rješenja jednačine (6.22), koristeći jednakost

$$y_1' = -p(x)y_1^2 - q(x)y_1 - r(x),$$

jednačinu (6.22) možemo predstaviti u obliku

$$\frac{(y - y_1)'}{y - y_1} = -p(x)(y + y_1) - r(x),$$

to jest

$$(\ln(y - y_1))' = -p(x)(y + y_1) - q(x). \tag{6.23}$$

Za drugo partikularno rješenje y_2 analogno dobijamo

$$(\ln(y - y_2))' = -p(x)(y + y_2) - q(x). \tag{6.24}$$

Iz jednačina (6.23) i (6.24) dobijamo

$$\left(\ln \frac{y - y_1}{y - y_2}\right)' = p(x)(y_2 - y_1),$$

pa je

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = C \exp\left(\int p(x)(y_2(x) - y_1(x))dx\right), \tag{6.25}$$

opšte rješenje jednačine (6.22).

Primjer 261. Jednačina $y' = \frac{1}{x^4} - y^2$, ima partikularna rješenja

$$y_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, \quad y_2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Koristeći formulu (6.25) dobijamo da je opšte rješenje

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = C \exp\left(-\int \frac{2dx}{x^2}\right),$$

$$\frac{x^2y - x - 1}{x^2y - x + 1} = Ce^{\frac{2}{x}}.$$

6.2.6 Jednačine Lagranža i Klera

Jednačina Lagranža ima oblik

$$\boxed{y = x\varphi(y) + \psi(y'), \qquad (6.26)}$$

gdje su φ i ψ diferencijabilne funkcije.
Pretpostavimo da funkcija φ nije identičko preslikavanje. Stavljajući $y' = p$, diferencirajući po x i koristeći jednakost $dy = pdx$ dobijamo linearnu jednačinu

$$\frac{dx}{dp} + x\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Neka je njeno opšte rješnje

$$x = g(p, C),$$

smjenom u (6.26) dobijamo

$$y = g(p, C)\varphi(p) + \psi(p).$$

Prema tome,

$$x = g(p, C),$$
$$y = g(p, C)\varphi(p) + \psi(p),$$

je opšte rješenje jednačine (6.26).

Primjer 262. Riješiti jednačinu $y = 2xy' + \ln y'$.
Rješenje. Stavimo $y' = p$, tada je $y = 2xp + \ln p$. Diferencirajući dobijamo

$$pdx = 2pdx + 2xdp + \frac{dp}{p},$$

a odavde je

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -\frac{1}{p^2}.$$

Ovo je linearna jednačina. Njeno opšte rješenje je

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}.$$

Dakle, opšte rješenje date jednačine je

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p},$$

$$y = \ln p + \frac{2C}{p} - 2.$$

Jednačina Klera [10] ima oblik

$$\boxed{y = xy' + \psi(y'). \qquad (6.27)}$$

Ona se rješava koristeći isti postupak kao i kod Lagranžove jednačine. Opšte rješenje Klerove jednačine je

$$y = Cx + \psi(C).$$

Klerova jednačina ima i singularno rješenje dato sa

$$y = xp + \psi(p),$$

$$x + \psi'(p) = 0. \qquad x = -\psi'(p)$$

Primjer 263. Riješiti jednačinu $y = xy' + \dfrac{1}{2y'}$.

Rješenje. Stavljajući $y' = p$, dobijamo

$$y = xp + \frac{1}{2p}.$$

Diferencirajući posljednju jednačinu i zamjenjujući dy sa pdx imamo

$$pdx = pdx + xdp - \frac{dp}{p^2},$$

odavde je

$$dp\left(x - \frac{1}{2p^2}\right) = 0.$$

Iz $dp = 0$, to jest $p = C$ dobijamo opšte rješenje

$$y = Cx + \frac{1}{2C}.$$

Dalje, iz

$$x - \frac{1}{2p^2} = 0,$$

imamo

$$x = \frac{1}{2p^2}.$$

Eliminišući p iz te jednačine i iz jednačine

$$y = xp + \frac{1}{2p},$$

dobijamo

$$y^2 = 2x.$$

Ovo je takođe rješenje (singularno) date jednačine.

[10] Alexis Claude de Clairaut (1713–1765), francuski matematičar.

Primjer 264. Odrediti krive koje imaju osobinu da je proizvod rastojanja od dvije stalne tačke do njihove proizvoljne tangente stalan i jednak b^2.
Rješenje. Neka su $M_1(-c,0)$ i $M_2(c,0)$ dvije fiksirane tačke. Jednačina tangente na krivu $y=f(x)$ u tački (x,y) je

$$Y-y=y'(X-x),$$

pa je rastojanje tačke M_1 do tangente dato sa

$$d_1=\frac{|y-y'(x+c)|}{\sqrt{1+y'^2}},$$

analogno za rastojanje do tačke M_2 je

$$d_2=\frac{|y-y'(x-c)|}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Prema uslovu zadatka je $d_1d_2=b^2$, pa dobijamo

$$|y^2-2xyy'+y'^2x^2-y'^2c^2|=b^2(1+y'^2).$$

Odavde dobijamo dvije Klerove jednačine

$$y=xy'\pm\left(y'^2(b^2+c^2)+b^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Opšta rješenja su

$$y=kx\pm\left(k^2a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

gdje smo stavili $b^2+c^2=a^2$ i k je proizvoljna konstanta. Singularna rješenja dobijamo eliminacijom parametra t iz

$$x=\pm ta^2(t^2a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}, y=xt\pm(t^2a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dobija se jednačina elipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1.$$

6.3 Diferencijalne jednačine višeg reda

6.3.1 Homogena jednačina

DEFINICIJA 6.2. *Diferencijalna jednačina*

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=q(x),\quad x\in(a,b),\tag{6.28}$$

je ***linearna diferencijalna jednačina reda*** *n.*
Ako je $q\equiv 0$ na (a,b) to jest,

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0,\quad x\in(a,b),\tag{6.29}$$

kažemo da se radi o ***homogenoj*** *jednačini, u suprotnom je* ***nehomogena*** *jednačina.*

Egzistencija i jedinstvenost rješenja diferencijalne jednačine (6.28) su date sljedećom teoremom.

TEOREMA 6.4. *Ako su funkcije $q, p_1, p_2, \ldots, p_n$ neprekidne na (a,b), tada za svako $x_0 \in (a,b)$ postoji jedinstveno rješenje y diferencijalne jednačine* (6.28) *definisano na (a,b) koje zadovoljava uslove*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

gdje su $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, dati realni brojevi.

Primjetimo da je kod diferencijalne jednačine (6.28) neprekidnost koeficijenata dovoljna za egzistenciju i jedinstvenost rješenja Košijevog početnog problema na cijelom intervalu (a,b), dok smo kod Peanove teoreme odnosno Pikar-Lindelefove teoreme imali egzistenciju i jedinstvenost rješenja u nekoj okolini tačke x_0.

DEFINICIJA 6.3. *Neka su date funkcije $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Simbol $L[\,]$ označava* ***diferencijalni operator,***

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y.$$

Sada diferencijalne jednačine (6.28) i (6.29) možemo pisati u obliku

$$L[y] = q(x) \quad \text{i} \quad L[y] = 0, \quad x \in (a,b).$$

Operator $L[\ \ ]$ je linearan, to jest vrijedi

$$L[Cy] = CL[y],\ C \in \mathbb{R},$$

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2].$$

Na osnovu ove dvije osobine imamo da je

$$L[C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2] + \cdots + C_nL[y_n],$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$.
Prema tome, vrijedi sljedeća teorema.

TEOREMA 6.5. *Ako su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rješenja diferencijalne jednačine* (6.29) *tada je i $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ njeno rješenje.*

Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da možemo dobiti nova rješenja jednačine (6.29) ako znamo neka njena rješenja. To nameće potrebu da se odredi skup rješenja kod koga se nijedno rješenje ne može dobiti preko ostalih rješenja.

U vezi sa ovim imamo sljedeću definiciju.

DEFINICIJA 6.4. *Za funkcije $y_1, \ldots, y_n$ kažemo da su* ***linearno zavisne*** *na (a, b) ako postoje konstante $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ od kojih je bar jedna različita od nule, takve da je na (a, b),*

$$\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n = 0. \tag{6.30}$$

Ako je identitet (6.30) *zadovoljen samo za $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, kažemo da su funkcije $y_1, \ldots, y_n$* ***linearno nezavisne*** *na (a, b).*

Primjer 265. Funkcije $y_1(x) = x,\ y_2(x) = 2x + 1$ i $y_3(x) = 7x + 2$ su linearno zavisne na skupu $\mathbb{R}$, jer je

$$y_3(x) - 2y_2(x) - 3y_1(x) = 0, x \in \mathbb{R}.$$

DEFINICIJA 6.5. *Neka su $y_1, \ldots, y_n$, $n-1$ puta diferencijabilne funkcije. Determinanta*

$$W(y_1, \ldots, y_n; x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

se naziva ***Vronskijevom***[11] ***determinantom*** *ili* ***Vronskijan.***

2

6

4

TEOREMA 6.6. *Funkcije $y_1, \ldots, y_n$ su linearno nezavisna rje~~šenje diferencijalne jednačine (6.29) na (a, b) a~~ko i samo ako je*

$$W(y_1, \ldots, y_n; x) \neq 0 \quad \text{za sve } x \in (a, b).$$

Dokaz. Pretpostavimo da su posmatrana rješenja linearno nezavisna ali da postoji $x_0 \in (a, b)$ takvo da je $W(x_0) = 0$. Sada slijedi da sistem homogenih algebarskih jednačina

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) &= 0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \cdots + C_n y_n'(x_0) &= 0 \\ &\vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned} \tag{6.31}$$

[11] Józef Maria Hoene-Wron'ski (1776–1853), poljski matematičar.

čija je determinanta $W(x_0)$ ima rješenje $C_1, C_2, \dots, C_n$ u kome nisu svi $C_i, i = 1, 2, \dots, n$ jednaki nuli. Formirajmo rješenje

$$z(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

zbog (6.31) ono zadovoljava početne uslove

$$z(x_0) = 0, z'(x_0) = 0, \dots, z^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Iste uslove ispunjava i rješenje $h(t) \equiv 0$. Sada na osnovu jedinstvenosti rješenja početnog problema (teorema 6.4) dobijamo

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) = 0 \text{ za sve } x \in (a, b),$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom da su $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ linearno nezavisna rješenje.
Obrnuto. Neka je $W(x) \neq 0$ za sve $x \in (a, b)$. Ako $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ne bi bila linearno nezavisna rješenja na (a, b) postojale bi konstante $C_1, C_2, \dots, C_n$, $(C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2 \neq 0)$ takve da za svako $x \in (a, b)$ važi

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) &= 0 \\ C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) + \cdots + C_n y_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x) + C_2 y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x) &= 0. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Za fiksirano $x_0 \in (a, b)$ sistem (6.32) je sistem homogenih algebarskih jednačina čija je determinanta $W(x_0) \neq 0$, pa je $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$ jedino rješenje tog sistema. Prema tome, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ su linearno nezavisna rješenja. □

Primjer 266. Pokaati da su funkcije $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ linearno nezavisne na $\mathbb{R}$.
Rješenje. Za Vronskijevu determinantu ovih funkcija važi

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 0 & 1! & 2x & \cdots & (n-1)x^{n-2} \\ 0 & 0 & 2! & \cdots & (n-1)(n-2)x^{n-3} \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)! \end{vmatrix} = 1!2! \cdots (n-1)! \neq 0.$$

Da bi se ispitala linearna zavisnost rješenja diferencijalne jednačine (6.29), obično se koristi formula **Liuvila**[12] i **Abela**, data sljedećom teoremom.

TEOREMA 6.7. *Neka su $y_1, \dots, y_n$ rješenja diferencijalne jednačine* (6.29) *i $x_0 \in (a, b)$, tada je*

$$W(y_1, \dots, y_n; x) = W(y_1, \dots, y_n; x_0) \exp\left(- \int_{x_0}^{x} p_1(t) dt \right), \ x \in (a, b).$$

[12] Joseph Liouville (1809–1882), francuski matematičar.

TEOREMA 6.8. *Ako su $y_1, \dots, y_n$ su linearno nezavisna rješenje diferencijalne jednačine* (6.29), *tada je*

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$$

njeno opšte rješenje.

Dakle, da bi odredili opšte rješenje diferencijalne jednačine (6.29) dovoljno je da znamo n njenih linearno nezavisnih rješenja. U slučaju da se radi o jednačini reda 2, dovoljno je da znamo jedno njeno partikularno rješenje.

TEOREMA 6.9. ***Liuvilova formula.*** *Ako je y_1 netrivijalno partikularno rješenje diferencijalne jednačine*

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

tada je

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left(-\int p_1(x)dx\right) dx \tag{6.33}$$

partikularno rješenje date jednačine, linearno nezavisno od y_1.

Dokaz. Neka je y_1 jedno partikularno rješenje jednačine

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0.$$

Uvedimo smjenu

$$y = y_1 z.$$

Dobijamo

$$y_1 z'' + (2y_1' + p_1 y_1)z' = 0,$$

$$z'' = -\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p_1\right) z'.$$

Ako stavimo $z' = u$, imamo

$$\frac{du}{u} = -\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p_1\right) dx,$$

pa dobijamo

$$u(x) = \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left(-\int p_1(x)dx\right).$$

Odavde je

$$z(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left(-\int p_1(x)dx\right) dx.$$

Rješenja y_1 i y_2 su nezavisna jer je $\dfrac{y_2}{y_1} \neq const.$ □

Primjer 267. Naći opšte rješenje jednačine $xy''+2y'+xy=0$, ako je $y_1=\frac{\sin x}{x}$, njeno partikularno rješenje.
Rješenje. Koristimo Liuvilovu formulu. Za partikularno rješenje y_2 je

$$y_2=\frac{\sin x}{x}\int\frac{1}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}\exp\left(-\int\frac{2}{x}dx\right)dx,$$

$$y_2=\frac{\sin x}{x}\int\frac{x^2}{\sin^2 x}\exp(-2\ln x)dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{x}.$$

Dakle, opšte rješenje je

$$y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}.$$

6.3.2 Nehomogena jednačina. Metoda varijacije konstanti

Neka je y_h opšte rješenje homogene diferencijalne jednačine (6.29), a y_p partikularno rješenje nehomogene diferencijalne jednačine (6.28), tada je

$$L[y_h]=0 \quad \text{i} \quad L[y_p]=q(x),$$

pa kako je operator $L[\,]$ linearan imamo

$$L[y_h+y_p]=q(x).$$

Na osnovu ovoga zaključujemo da je $y=y_h+y_p$ rješenje nehomogene diferencijalne jednačine (6.28). Dalje, kako je $y_h=y-y_p$, eliminacijom konstanti iz y_h i odgovarajućih izvodnih jednakosti dobija se samo homogena jednačina. Isto tako eliminacijom konstanti iz y i odgovarajućih izvodnih jednakosti dobija se samo nehomogena jednačina. Dakle, vrijedi sljedeća teorema.

TEOREMA 6.10. *Neka je y_h opšte rješenje jednačine* (6.29), *a y_p partikularno rješenje jednačine* (6.28), *tada je $y=y_h+y_p$ opšte rješenje jednačine* (6.28).

Metoda pomoću koga se polazeći od opšteg rješenja diferencijalne jednačine (6.29) dolazi do partikularnog rješenja diferencijalne jednačine (6.28) je poznata kao **metoda varijacije konstanti**.

TEOREMA 6.11. *Neka su $y_1, y_2, \dots, y_n$ linearno nezavisna rješenja diferencijalne jednačine* (6.29). *Opšte rješenje diferencijalne jednačine* (6.28) *je dato sa*

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x),$$

pri čemu je,

$$C_i(x) = \int \frac{W_i(y_1, y_2, \dots, y_n; x)}{W(y_1, y_2, \dots, y_n; x)} dx,$$

gdje je $W(y_1, y_2, \dots, y_n; x)$ Wronskijeva determinanta, a $W_i(y_1, y_2, \dots, y_n; x)$ je determinanta koja se dobije od Wronskijeve determinante kada se $i-$ta kolona zamijeni sa kolonom $[0, 0, \dots, 0, q(x)]^\top$.

Dokaz. Neka su $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ linearno nezavisna rješenja diferencijalne jednačine (6.29). Odredićemo funkcije $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ takve da je

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x), \tag{6.34}$$

partikularno rješenje diferencijalne jednačine (6.28).
Diferenciranjem u (6.34) dobijamo

$$y'(x) = (C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x)) +$$
$$+ (C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \cdots + C_n(x)y_n'(x)).$$

Postavimo uslov

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0.$$

Sada je

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \cdots + C_n(x)y_n'(x),$$

pa je

$$y''(x) = (C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x)) +$$
$$+ (C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \cdots + C_n(x)y_n''(x)).$$

postavimo sada uslov

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Tada imamo

$$y''(x) = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \cdots + C_n(x)y_n''(x).$$

Nastavljajući ovaj postupak do $n-1$ prvog izvoda dobijamo

$$y^{(k)} = C_1(x)y_1^{(k)}(x) + C_2(x)y_2^{(k)}(x) + \cdots + C_n(x)y_n^{(k)}(x),$$

$k = 1, 2, \ldots, n-1$. Za $n-$ti izvod imamo

$$y^{(n)} = (C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n(x)'y_n^{(n-1)}(x)) +$$
$$+(C_1(x)y_1^{(n)}(x) + C_2(x)y_2^{(n)}(x) + \cdots + C_n(x)y_n^{(n)}(x)).$$

Uvrštavajući $y^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ u diferencijalnu jednačinu (6.28) i koristeći činjenicu da su $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ rješenja diferencijalne jednačine (6.29) dobijamo

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n(x)'y_n^{(n-1)}(x) = q(x).$$

Dakle, imamo sistem

$$\begin{aligned}
C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)'y_n(x) &= 0\\
C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n(x)'y_n'(x) &= 0\\
&\vdots\\
C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n(x)'y_n^{(n-2)}(x) &= 0\\
C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n(x)'y_n^{(n-1)}(x) &= q(x).
\end{aligned}$$

Determinanta sistema je Vronskijeva determinanta $W(y_1, y_2, \ldots, y_n; x)$. Kako su rješenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linearno nezavisna imamo da je

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n; x) \neq 0.$$

Na osnovu Kramerovog pravila je

$$C_i'(x) = \frac{W_i(y_1, y_2, \ldots, y_n; x)}{W(y_1, y_2, \ldots, y_n; x)}.$$

Dakle,

$$C_i(x) = \int \frac{W_i(y_1, y_2, \ldots, y_n; x)}{W(y_1, y_2, \ldots, y_n; x)} dx.$$

□

Primjer 268. Data je nehomogena jednačina

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x.$$

Ako je poznato da su $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = xe^{-x}$ linearno nezavisna rješenja homogene diferencijalne jednačine

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

odrediti opšte rješenje nehomogene jednačine.
Rješenje. Za Vronskijevu determinantu imamo

$$W(y_1, y_2, ; x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}.$$

Dalje,

$$W_1(y_1, y_2, ; x) = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ e^{-x}\ln x & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-2x}\ln x,$$

$$W_2(y_1, y_2, ; x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{-x}\ln x \end{vmatrix} = e^{-2x}\ln x,$$

pa je

$$C_1(x) = \int(-x\ln x)dx = -\frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{x^2}{4} + C_1,$$

$$C_2(x) = \int(-\ln x)dx = x\ln x - x + C_2.$$

Dakle, opšte rješenje nehomogene jednačine je

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \left(-\frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{x^2}{4}\right)e^{-x} + (x\ln x - x)xe^{-x}.$$

6.3.3 Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Jednačina $L[y] = 0$, kod koje su svi koeficijenti p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ realne konstante, to jest jednačina

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_ny = 0, \ p_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.35}$$

se naziva **homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima**. Kod ove jednačine opšte rješenje se može formirati pomoću korijena **karakteristične jednačine**

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0. \tag{6.36}$$

Naime, ako se traži rješenje jednačine (6.35) u obliku

$$y(x) = e^{\lambda x}, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

imamo

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_ny = p_n(\lambda)e^{\lambda x},$$

gdje je

$$p_n(x) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n.$$

Kako je $e^{\lambda x} > 0$, zaključujemo da je

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_ny = 0,$$

ako je

$$p_n(\lambda) = 0.$$

Dakle, ako su λ_i, $i = 1, \ldots, n$, korijeni karakteristične jednačine (6.36), tada su funkcije $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$, $i = 1, \ldots, n$, rješenja jednačine (6.35). Mogući su sljedeći slučajevi :

(*i*) Korijeni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ su realni i različiti. Tada opšte rješenje jednačine (6.35) ima oblik

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

(*ii*) Korijeni karakteristične jednačine su realni, ali su neki od njih višestruki. Na primjer, ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \widetilde{\lambda}$, a svi ostali korijeni su različiti onda opšte rješenje ima oblik

$$y = C_1 e^{\widetilde{\lambda} x} + C_2 x e^{\widetilde{\lambda} x} + C_3 x^2 e^{\widetilde{\lambda} x} + \cdots + C_k x^{k-1} e^{\widetilde{\lambda} x} +$$

$$+ C_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

(*iii*) Svi korijeni su različiti, ali se među njima nalaze i kompleksni korijeni. Neka je na primjer $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \lambda_3 = \gamma + i\delta, \lambda_4 = \gamma - i\delta$, a ostali korijeni su realni. Tada opšte rješenje ima oblik

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_3 e^{\gamma x} \cos \delta x + C_4 e^{\gamma x} \sin \delta x +$$

$$+ C_5 e^{\lambda_5 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

(*iv*) Među korijenima se nalaze višestruki kompleksni korijeni. Na primjer, u slučaju da je $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ korijen višestrukosti k karakteristične jednačine $\left(k \leq \frac{n}{2}\right)$, tada je $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, takođe korijen višestrukosti k. Ako su ostalih $n - 2k$ korijena realni i različiti onda je opšte rješenje

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_3 x e^{\alpha x} \cos \beta x + C_4 x e^{\alpha x} \sin \beta x +$$

$$\cdots + C_{2k-1} x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x + C_{2k} x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x + C_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Primjer 269. Naći opšte rješenje jednačine

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

Rješenje. Karakteristična jednačina je

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Odavde je

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0,$$

pa su korijeni karakteristične jednačine

$$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 2.$$

Dakle, korijeni su realni i različiti, pa je opšte rješenje

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}.$$

Primjer 270. Naći opšte rješenje jednačine

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

Rješenje. U ovom slučaju karakteristična jednačina je

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Odavde je

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0,$$

pa je

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1.$$

Korijeni su realni, pri čemu je jedan od njih višestrukosti dva, pa je opšte rješenje

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x}.$$

Primjer 271. Naći opšte rješenje jednačine

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0.$$

Rješenje. Karakteristična jednačina je

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

ili

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0,$$

pa su korijeni

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = i,\ \lambda_4 = \lambda_5 = -i.$$

Opšte rješenje je

$$y = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x.$$

Linearna diferencijalna jednačina

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x), \tag{6.37}$$

gdje su $p_1, \ldots, p_n$ konstante naziva se **Ojlerovom diferencijalnom jednačinom**. Ona se smjenom $x = e^t$ svodi na linearnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

Primjer 272. Riješiti jednačinu

$$x^3 y''' + x^2 y'' + 3xy' - 8y = 0.$$

Rješenje. Uvedimo smjenu $x = e^t$. Imamo

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt},\ x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)y = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt},$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-1\right)\left(\frac{d}{dt}-2\right)y$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-1\right)\left(\frac{dy}{dt}-2y\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-\frac{dy}{dt}+2y\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y\right).$$

Dakle,

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx},$$

pa imamo

$$\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+3\frac{dy}{dt}-8y=0,$$

to jest

$$\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}-8y=0,$$

karakteristična jednačina je

$$\lambda^3-2\lambda^2+4\lambda-8=0,$$

odakle je

$$(\lambda-2)(\lambda^2+4)=0,$$

to jest

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=-2i,\ \lambda_3=2i.$$

Zaključujemo da je

$$y = C_1e^{2t}+C_2\cos 2t+C_3\sin 2t,$$

opšte rješenje ove jednačine. Vraćajući promjenljivu x imamo

$$y = C_1x^2+C_2\cos 2\ln|x|+C_3\sin 2\ln|x|.$$

6.3.4 Neki integrabilni tipovi diferencijalnih jednačina

Navodimo neke diferencijalne jednačine, za koje je moguće dobiti opšte rješenje ili pogodnom smjenom sniziti red.

I

$$F(x,y^{(n)})=0. \tag{6.38}$$

Ako se jednačina (6.38) može zapisati u eksplicitnom obliku $y^{(n)}=f(x)$, opšte rješenje se dobija uzastopnom integracijom n puta

$$y = \underbrace{\int\cdots\int}_{n} f(x)dx\cdots dx + C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots+C_{n-1}x+C_n.$$

Ako diferencijalna jednačina (6.38) nije rješiva po $y^{(n)}$, nekada je moguće uvesti parametrizaciju

$$x = u(t), \tag{6.39}$$

$$y^{(n)} = v(t), \tag{6.40}$$

pa iz

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = v(t)u'(t)dt,$$

slijedi

$$y^{(n-1)} = \int v(t)u'(t)dt + C,$$

odakle sa n uzastopnih integracija dobijamo

$$y = \underbrace{\int \cdots \int}_{n} v(t)u'(t)dt \cdots dt + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_n. \tag{6.41}$$

Opšte rješenje je dato parametarski jednačinama (6.39) i (6.41).

II Diferencijalna jednačina

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{6.42}$$

se smjenom $y^{(k)} = z$, gdje je $z = z(x)$ transformiše u diferencijalnu jednačini $(n-k)$-tog reda.

III Ako diferencijalna jednačina ne sadrži promjenljivu x,

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{6.43}$$

uvodi se smjena $y' = z$, gdje je $z = z(y)$. Uzima se y za novu promjenljivu, a $z = z(y)$ za novu nepoznatu funkciju. Na taj način se snižava red jednačine za jedan.

IV Ako za jednačinu

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{6.44}$$

postoji broj m tako da vrijedi

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}), \tag{6.45}$$

uvodi se smjena $y' = yz$, gdje je $z = z(x)$. Važi

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z'),$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$

$$\cdots$$

$$y^{(n)} = yh(z, z', \ldots, z^{(n-1)})$$

pa se red jednačine (6.44) snižava za jedan.

V Ako je lijeva strana jednačine (6.44) izvod neke funkcije,

$$(F(x,y,y',\dots,y^{(n)}))' = f(x,y,y,\dots,y^{(n-1)}),$$

dobijamo jednačinu

$$f(x,y,y,\dots,y^{(n-1)}) = C,$$

koja je reda $n-1$.

Primjer 273. Riješiti jednačine
(a) $x = \dfrac{y''}{1+y''^2}$, (b) $(1-x^2)y'' - xy' - 2 = 0$, (c) $y''' = y'(1+y'^2)^2$,
(d) $y(xy''+y') = xy'^2(1-x)$, (e) $y''(1+y'^2) - 3y'y''^2 = 0$.
Rješenje. (a) $y'' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$, $\left(y'' = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right.$ otpada jer su x i y'' istog znaka). Imamo

$$y' = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} + C_1,$$

pa je

$$y = -\int(\sqrt{1-x^2}+C_1)dx = -\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C_1x + C_2, \quad |x|<1,$$

opšte rješenje.
(b) Jednačina je tipa **II**, smjenom $y' = p$, svodi se na linearnu

$$p' - \frac{x}{1-x^2}p = \frac{2}{1-x^2}. \tag{6.46}$$

Opšte rješenje jednačine (6.46) je

$$p = \sqrt{|1-x^2|^{-1}}\left(C_1 + 2\int \frac{\sqrt{|1-x^2|}}{1-x^2}dx\right). \tag{6.47}$$

Za $|x| < 1$ iz (6.47) slijedi

$$p = \frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{6.48}$$

Kako je $y' = p$ iz (6.48) dobijamo

$$y = C_1\arcsin x + (\arcsin x)^2 + C_2.$$

Za $|x| > 1$ iz (6.47) slijedi

$$p = \frac{C_1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{2\ln|x+\sqrt{x^2-1}|}{\sqrt{x^2-1}},$$

pa imamo

$$y = C_1 \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + \ln^2|x + \sqrt{x^2-1}| + C_2.$$

(c) Jednačina je tipa **III**, pa uvodimo smjenu $y' = z$, gdje je $z = z(y)$. Dobija se

$$z'' = z(1+z^2)^2, \tag{6.49}$$

množenjem jednačine (6.49) sa $2z'$ je

$$2z'z'' = 2zz'(1+z^2)^2,$$

odakle slijedi

$$z'^2 = \frac{1}{3}(1+z^2)^3 + C_1. \tag{6.50}$$

Jednačina (6.50) je sa razdvojenim promjenljivim, njeno opšte rješenje je

$$x = \pm \int \left[\frac{1}{3}(1+z^2)^3 + C_1\right]^{-\frac{1}{2}} dz + C_2. \tag{6.51}$$

Kako je $y = \int y'dx = \int zdx = \int zx'_z dz$, iz (6.51) je

$$y = \pm \int z\left[\frac{1}{3}(1+z^2)^3 + C_1\right]^{-\frac{1}{2}} dz + C_3. \tag{6.52}$$

Opšte rješenje polazne jednačine je dato parametarski sa (6.51) i (6.52).
(d) Ovde se radi o jednačini tipa **IV**, pa uvodimo smjenu $y' = yz$, gdje je $z = z(x)$. Datom smjenom se jednačina transformiše u

$$y^2(xz' + z + x^2z^2) = 0.$$

Bernulijeva jednačina

$$xz' + z + x^2z^2 = 0,$$

ima opšte rješenje

$$z = \frac{1}{x(x+C_1)},$$

pa opšte rješenje polazne jednačine nalazimo iz

$$y' = y\frac{1}{x(x+C_1)}.$$

Dobija se

$$y = C_2\left|\frac{x}{x+C_1}\right|^{\frac{1}{C_1}}, \text{ za } C_1 \neq 0 \text{ i } y = Ce^{-\frac{1}{x}}, \text{ ako je } C_1 = 0.$$

(e) Datu jednačinu možemo transformisati u

$$\frac{y'''}{y''} - \frac{3y'y''}{1+y'^2} = 0, \quad (y'' \neq 0). \tag{6.53}$$

Lijeva strana jednačine (6.53) je izvod funkcije $\ln|y''| - \frac{3}{2}\ln(1+y'^2)$, pa je jednačina (6.53) ekvivalentna sa

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = C_1.$$

Kako je

$$\left(\frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} - C_1 x\right)' = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} - C_1,$$

dobijamo

$$\frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} - C_1 x = C_2.$$

Poslednja jednačina je tipa **I**, njeno opšte rješenje

$$y = \int \frac{C_1 x + C_2}{\sqrt{1-(C_1+C_2)^2}} dx + C_3.$$

Nakon integracije slijedi da je

$$\left(x + \frac{C_2}{C_1}\right)^2 + \left(y - \frac{C_3}{C_1}\right)^2 = \frac{1}{C_1^2}. \tag{6.54}$$

Uslov, $y'' = 0$ daje $y = C_1 x + C_2$

$$y = C_1 x + C_2. \tag{6.55}$$

Prema tome, opšte rješenje čine integralne krive date sa (6.54) i (6.55).

6.4 Zadaci

1. Odrediti treću aproksimaciju rješenja jednačine
$$y' = x^2 + y^2$$
sa početnim uslovom $y(0) = 0$ u oblasti
$$D = \{(x, y) : |x| \leq 2, \quad |y| \leq 2\}$$
i ocijeniti grešku.
Rješenje. Ovde je $f(x, y) = x^2 + y^2, (x_0, y_0) = (0, 0), a = 2, b = 2$. Na oblasti D važi
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq 4|y_1 - y_2|,$$
$$M = \sup_{(x,y)\in D} |f(x, y)| = 8, h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{2, \frac{2}{8}\right\} = \frac{1}{4}.$$
Na intervalu $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ niz iteracija je
$y_0(x) = 0,$
$y_1(x) = \int\limits_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3},$
$y_2(x) = \int\limits_0^x (t^2 + y_1^2(t))dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$
$y_3(x) = \int\limits_0^x (t^2 + y_2^2(t))dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{3 \cdot 63 \cdot 11} + \frac{x^{15}}{63^2 \cdot 15}.$
Iz nejednakosti (6.12) je $|y(x) - y_3(x)| \leq \frac{1}{12}, x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

2. Pokazati da se jednačina
$$y' = f(ax + by),$$
gdje je f neprekidna funkcija i $ab \neq 0$, može transformisati u jednačinu sa razdvojenim promjenljivim.
Rješenje. Uvedimo smjenu $z = ax + by$, gdje je $z = z(x)$. Važi
$$z' = bf(z) + a,$$
a ovo je jednačina sa razdvojenim promjenljivim.

3. Riješiti jednačine:
   (a) $\sqrt{1 + y^2}dx = xydy,$
   (b) $e^{-y}(1 + y') = 1,$

(c) $y' = \cos(y - x)$,

(d) $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$.

Rješenje.

(a) Integracijom dobijamo

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}},$$

$$\ln|x| = \sqrt{1+y^2} + C$$

(b) Jednačina je ekvivalentna sa

$$\left(-1 + \frac{e^y}{e^y - 1}\right) dy = dx,$$

odakle integracijom imamo

$$-y + \ln|e^y - 1| = x + C.$$

(c) Uvesti smjenu $z = y - x$, dobija se $\cot \frac{y-x}{2} = x + C$.

(d) Smjena $z = 4x+2y-1$, $\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2) = x+C$.

4. Odrediti jednačinu krive tako da je površina oblasti ograničene koordinatnim osama, krivom i ordinatom proizvoljne tačke na krivoj jednaka trećem stepenu ordinate.
Rješenje. Ako je $y(x)$ jednačina tražene krive, iz uslova zadatka, slijedi da je $\int\limits_0^x y(t)dt = y^3(x), x \geq 0$, ili $\int\limits_x^0 y(t)dt = y^3(x), x \leq 0$. Diferenciranjem dobijamo $y = \pm 3y^2 y'$, uz uslov $y(0) = 0$. Dobijene jednačine su sa razdvojenim promjenljivim, integracijom nalazimo $y = \pm\sqrt{\frac{2|x|}{3}}$ i $y = 0$.

5. Naći rješenje jednačine

$$x^2 y' - \cos 2y = 1,$$

za koje

$$y(x) \to \frac{9\pi}{4} \text{ kad } x \to +\infty. \tag{6.56}$$

Rješenje. Data jednačina je ekvivalentna sa

$$\frac{dy}{2\cos y} = \frac{dx}{x}.$$

Njeno opšte rješenje je

$$\tan y = -\frac{2}{x} + C.$$

Iz uslova (6.56) dobijamo $C = \tan\frac{9\pi}{4} = 1$, pa traženo rješenje

$$\tan y = -\frac{2}{x} + 1.$$

6. Tijelo se u sredini koja ima temperaturu 30° C za 30 minuta ohladi sa 70° C na 50° C. Odrediti vrijeme kada će temperatura tijela pasti na 40° C.
Rješenje. Prema Njutnovom zakonu je brzina promjene temperature tijela proporcionalna razlici temperature tijela i temperature sredine. Neka je $T = T(t)$ temperatura tijela (izražena u $°C$, a t vrijeme hlađenja (izraženo u min.). Tada je
$$\frac{dT}{dt} = k(T - 30).$$
Ovo je jednačina sa razdvojenim promjenljivim, njeno opšte rješenje je
$$T = 30 + ce^{kt}. \tag{6.57}$$
Za $t = 0$ je $T = 70$, a za $t = 30$, $T = 50$, pa iz (6.57) slijedi
$$c = 40, \quad k = -\frac{\ln 2}{30} \approx -0.02310.$$
Prema tome,
$$T = 30 + 40e^{-0.02310t}. \tag{6.58}$$
Ako je $T = 40$, tada iz (6.58) dobijamo
$$t = \frac{\ln 4}{0.02310} \approx 60.01.$$
Temperatura tijela pada na 40° C nakon približno 60 min.

7. Riješti diferencijalnu jednačinu
$$y' = \sqrt{x^2 - y} + 2x. \tag{6.59}$$
Rješenje. Uvedimo smjenu $z = x^2 - y$, gdje je $z = z(x)$. Iz (6.59) dobijamo jednačinu sa razdvojenim promjenljivim
$$\frac{z'}{\sqrt{z}} = -1, \quad z \neq 0,$$
njeno rješenje je $z = \frac{(x-C)^2}{4}$, vraćajući smjenu, dobijamo opšte rješenje jednačine (6.59),
$$y = x^2 - \frac{(x-C)^2}{4}. \tag{6.60}$$
Ako je $z = 0$ tada je $y = x^2$, što je takođe rješenje jednačine (6.59) koje nije sadržano u opštem rješenju (6.60), pa jednačina ima i singularno rješenje $y = x^2$.

8. Pokazati da ako su neprekidne funkcije $M(x,y)$ i $N(x,y)$ $(M^2(x,y)+N^2(x,y)\neq 0)$ istog stepena homogeniteta da je

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0,$$

homogena diferencijalna jednačina.
Rješenje. Ako su funkcije M i N istog stepena homogeniteta m, onda važi

$$M(tx,ty)=t^m M(x,y), \quad N(tx,ty)=t^m N(x,y),$$

pa je

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{n(x,y)}=-\frac{x^m M(1,\frac{y}{x})}{x^m N(1,\frac{y}{x})}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

9. Odrediti integralnu krivu jednačine

$$(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0,$$

koja prolazi kroz tačku $(1,1)$.
Rješenje. Funkcije $M(x,y)=x^2+2xy-y^2$ i $N(x,y)=y^2+2xy-x^2$ su stepena homogeniteta 2. Dobijamo homogenu diferencijalnu jednačinu

$$y'=\frac{1+\frac{2y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{2y}{x}-1},$$

koja se smjenom $y=zx$ transformiše u jednačinu sa razdvojenim promjenljivim

$$\frac{dx}{x}+\frac{(z^2+2z-1)dz}{(z^2+1)(z+1)},$$

čije je opšte rješenje

$$\ln(z^2+1)-\ln|z+1|=\ln|x|+C_1,$$

tj.

$$\frac{z^2+1}{z+1}=Cx, \text{ gdje je } C=\pm e^{C_1}.$$

Opšte rješenje polazne jednačine je

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}=C.$$

Funkcije $x=0, y<0$ i $x=0, y>0$, nisu rješenja ove jednačine, a iz uslova $z+1=0$ dobijamo dva rješenja $y=-x, x<0$ i $y=-x, x>0$. Ona su partikularna rješenja, sadržana u opštem rješenju za $C=+\infty$. Za $x=y=1$ dobijamo $C=1$, pa kroz tačku $(1,1)$ prolazi partikularno rješenje

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

10. Riješiti jednačinu
$$(2x+y-2)y' = -x+y-1.$$
Rješenje. Sistem
$$\begin{aligned} 2x+y-2&=0\\ -x+y-1&=0\end{aligned}$$
ima rješenje $x=\frac{1}{3}, y=\frac{4}{3}$, pa smjenom
$$x=u+\frac{1}{3}, y=v+\frac{4}{3},$$
jednačina se transformiše u homogenu
$$v'=\frac{v-u}{v+2u}.$$
Smjenom $v=uz, z=z(u)$ dolazimo do jednačine koja razdvaja promjenljive
$$z'=-\frac{z^2+z+1}{u(u+2)},$$
njeno opšte rješenje je
$$\ln(z^2+z+1)+2\sqrt{3}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+2\ln|u|=C.$$
Vraćajući x i y dobijamo opšte rješenje polazne jednačine
$$\ln\left(x^2+xy+y^2-2x-3y+\frac{7}{3}\right)+2\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{3}(x+2y-3)}{3x-1}=C.$$

11. Naći krivu koja prolazi kroz tačku $(2,1)$ i ima osobinu da svaka tangenta na tu krivu siječe $x-$osu u tački podjednako udaljenoj od tačke dodira i od koordinatnog početka.
Rješenje. Neka je kriva koju tražimo $y=y(x)$. Jednačina tangente u tački $M(x,y)$ je
$$Y-y=y'(X-x).$$
Tangenta siječe $x-$osu u tački $A\left(-\frac{y}{y'}+x,0\right)$. Prema uslovu zadatka je $\overline{0A}=\overline{AM}$ odakle je
$$\left(\frac{y}{y'}\right)^2+y^2=\left(-\frac{y}{y'}+x\right)^2,$$
tj. dobijamo homogenu jednačinu
$$y'=\frac{\frac{2y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

koja se smjenom $y = zx, z = z(x)$ svodi na jednačinu sa razdvojenim promjenljivim

$$\frac{(1-z^2)dz}{z(1+z^2)} = \frac{dx}{x}.$$

Njeno rješenje je

$$y = C(x^2 + y^2).$$

Iz uslova da kriva prolazi kroz tačku $(2,1)$ slijedi $C = \frac{1}{5}$, pa je

$$y = \frac{x^2 + y^2}{5},$$

tražena kriva.

12. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y' = 2x(x^2 + y)$.
Rješenje. Jednačina je linearna,

$$y' - 2xy = 2x^3,$$

njeno opšte rješenje je dato formulom (6.19),

$$y = e^{\int 2xdx}\left(C + \int 2x^3 e^{-\int 2xdx}\right) dx.$$

Odakle dobijamo

$$y = Ce^{x^2} - x^2 - 1.$$

13. Ako je $y_1(x)$ partikularno rješenje linearne jednačine

$$y' + p(x)y = q(x),$$

pokazati da je njeno opšte rješenje dato sa

$$y(x) = y_1(x) + Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{6.61}$$

Rješenje. Neka je y_1 partikularno i y proizvoljno rješenje. Kako je

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y_1' + p(x)y_1 = q(x),$$

to je

$$y' - y_1' + p(x)(y - y_1) = 0,$$

odavde slijedi (6.61).

14. Naći integralnu krivu jednačine $y \ln y dx + (x - \ln y)dy = 0$, koja prolazi kroz tačku $\left(\frac{1}{2}, e\right)$.
Rješenje. Jednačina je linearna po x,

$$x' + \frac{x}{y \ln y} = \frac{1}{y},$$

njeno opšte rješenje je

$$x = \frac{C}{\ln y} + \frac{\ln y}{2}.$$

Kroz tačku $\left(\frac{1}{2}, e\right)$ prolazi integralna kriva $x = \dfrac{\ln y}{2}$.

15. Pokazati da samo jedno rješenje jednačine

$$xy' - (2x^2 + 1)y = x^2$$

teži ka konačnoj graničnoj vrijednosti kad $x \to +\infty$. Izraziti to rješenje preko integrala.
Rješenje. Jednačina je linearna i njeno opšte rješenje je

$$y = Cxe^{x^2} + xe^{x^2} \int e^{-x^2} dx.$$

Kako je

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{x^2} \int e^{-x^2} dx = \lim_{x \to +\infty} \frac{\int e^{-x^2} dx}{\frac{1}{xe^{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{-2x^2 - 1} = -\frac{1}{2}$$

i

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{x^2} = +\infty,$$

zaključujemo da je $C = 0$ i rješenje

$$y(x) = xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \to -\frac{1}{2} \text{ kad } x \to +\infty.$$

16. Odrediti rješenje $y(x)$ jednačine

$$x^2 y' \cos\frac{1}{x} - y \sin\frac{1}{x} = -1,$$

za koje vrijedi $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = 1$.
Rješenje. Data jednačina je linearna i njeno opšte rješenje je

$$y = C \cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x},$$

pa iz uslova zadatka dobijamo $C = 1$ tj. traženo rješenje je $y = \cos\frac{1}{x}$.

17. Koristeći smjenu, svesti jednačinu

$$y' - \operatorname{tg} y = e^x \frac{1}{\cos y},$$

na linearnu jednačinu, a zatim je riješiti.
Rješenje. Uvedimo smjenu $z = \sin y$. Dobijamo jednačinu

$$z' - z = e^x,$$

čije je rješenje $z = e^x(C + x)$. Opšte rješenje date jednačine je

$$\sin y - e^x(C + x) = 0, \quad (\cos y \neq 0).$$

18. Riješiti jednačinu $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$.
Rješenje. Ovo je Bernulijeva jednačina, koja se smjenom $y = z^{-\frac{1}{2}}$ svodi na linearnu jednačinu
$$z' - \frac{4}{x}z = 2x^4e^x.$$
Rješenje ove linearne jednačine je
$$z = x^4(C + 2e^x).$$
Odavde je opšte rješenje
$$y^{-2} = x^4(C + 2e^x).$$
Singularno rješenje je $y = 0$.

19. Riješiti jednačinu
$$y' = \frac{yf'(x) - y^2}{f(x)}, \text{ gdje je } f(x) \text{ data neprekidna funkcija.}$$
Rješenje. Jednačina je Bernulijeva
$$y' - \frac{f'(x)}{f(x)}y = -\frac{1}{f(x)}y^2,$$
koja se smjenom $y = z^{-1}$ svodi na linearnu. Opšte rješenje je
$$y = \frac{f(x)}{x + C}.$$
Rješenje je i $y = 0$. Primjetimo da je polazna jednačina ekvivalentna sa
$$\left(\frac{f(x)}{y}\right)' = 1,$$
odakle je $\dfrac{f(x)}{y} = x + C$.

20. Riješiti jednačinu $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$.
Rješenje. Datu jednačinu možemo zapisati u obliku
$$x' - \frac{1}{2y}x = -\frac{\sin y}{2y}x^3,$$
a ovo je Bernulijeva jednačina. Smjenom $z = x^{-\frac{1}{2}}$ svodi se na linearnu, njenim rješavanjem dobijamo
$$x^2(C - \cos y) = y, y = 0.$$

21. Riješiti jednačinu $y' \tan y + 4x^3 \cos^3 y = 2x$.
Rješenje. Smjenom $\cos y = z$ jednačina se svodi na Bernulijevu. Opšte rješenje je $\cos y(2x^2 + 2 + Ce^{x^2}) = 1$.

22. Riješiti jednačinu $xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$.
Rješenje. Ovo je Darbuova jednačina (vidjeti relaciju (6.21)). Smjenom $y = zx$ se svodi na Bernulijevu jednačinu,

$$\frac{dx}{dz} + \frac{z}{1+z^2}dx = -\frac{x^2}{1+z^2},$$

čije je rješenje $C\sqrt{x^2+y^2} + y - 1 = 0$.

23. Naći opšte rješenje Rikatijeve jednačina

$$x^2y' + x^2y^2 + xy = 4$$

ako ima dva partikularna rješenje $y_1(x) = f(x)$ i $y_2(x) = f(-x)$, gdje funkciju f treba odrediti.
Rješenje. Dobijamo

$$x^2 f'(x) + x^2 f^2(x) + xf(x) = 4 \tag{6.62}$$

$$-x^2 f'(-x) + x^2 f^2(-x) + xf(-x) = 4. \tag{6.63}$$

Ako u jednačini (6.63) stavimo x umjesto $-x$ dobijamo

$$-x^2 f'(x) + x^2 f^2(x) - xf(x) = 4. \tag{6.64}$$

Iz (6.62) i (6.64) dobijamo

$$f(x) = \pm\frac{2}{x}.$$

Prema napomeni 6.4 (relacija (6.25)), opšte rješenje Rikatijeve jednačine je

$$\frac{y-\frac{2}{x}}{y+\frac{2}{x}} = Ce^{-\int \frac{4}{x}dx}, \text{ tj. } x^4(xy-2) = C(xy+2).$$

24. Riješiti jednačinu

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0.$$

Rješenje. Ovo je Rikatijeva jednačina. Partikularno rješenje tražimo u obliku $y_1 = \frac{a}{x}$. Zamjenom u datoj jednačini dobijamo partikularno rješenje $y_1 = \frac{1}{x}$. Jednačina se pomoću smjene $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ svodi na linearnu jednačinu

$$z' - \frac{2z}{3x} = \frac{1}{3}.$$

Rješavajući dobijenu jednačinu i vraćajući y dobijamo opšte rješenje

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{Cx^{\frac{2}{3}} + x}, \quad y = \frac{1}{x}.$$

25. Riješiti jednačinu $y = 2xy' - y'^3$.
Rješenje. Smjenom $y' = p$ dobijamo jednačinu

$$y = 2xp - p^3, \tag{6.65}$$

odakle diferenciranjem dobijamo

$$dy = 2pdx + 2xdp - 3p^2dp.$$

Kako je $dy = pdx$, dobijamo

$$pdx + 2xdp - 3p^2dp = 0, \text{ tj. } \frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = 3p.$$

Dobijena jednačina je linearna i ima opšte rješenje

$$x = \frac{C}{p^2} + \frac{3p^2}{4}. \tag{6.66}$$

Iz (6.66), koristeći (6.65) dobijamo

$$y = 2\left(\frac{C}{p^2} + \frac{3p^2}{4}\right)p - p^3. \tag{6.67}$$

Sa (6.66) i (6.67) dato je opšte rješenje date jednačine.

26. Riješiti jednačinu $y = x(1 + y') + y'^2$.
Rezultat.

$$x = Ce^{-p} - 2(p - 1)$$
$$y = Ce^{-p}(1 + p) - p^2 + 2.$$

27. Odrediti rješenje jednačine $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.
Rješenje. Smjenom $y' = p$ dobijamo jednačinu

$$y = xp + \sqrt{1 + p^2},$$

čijim diferenciranjem nalazimo

$$\frac{dp}{dx}\left(x + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = 0.$$

Iz $\frac{dp}{dx} =$ slijedi $p = C$ i opšte rješenje je

$$y = Cx + \sqrt{1 + C^2}.$$

Singularno rješenje je dato parametarski

$$y = xp + \sqrt{1 + p^2}$$
$$x = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Eliminacijom parametra p dobijamo da je singularna integralna kriva gornja polukružnica $x^2 + y^2 = 1, y > 0$.

28. Pokazati da su funkcije $1, e^x, e^{2x}$ linearno nezavisne.
Rješenje. Vronskijeva determinanta za ove funkcije je

$$W = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} \neq 0.$$

29. Riješiti jednačinu $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, ako je poznato da ima partikularno rješenje oblika $y = ax + b$.
Rješenje. Partikularno rješenje je $y_1 = x$. Koristimo Liuvilovu formulu (teorema 6.9),

$$y_2 = x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x dx}{1-x^2}} dx = x\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) = -1 + \frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,$$

je partikularno rješenje nezavisno od y_1. Opšte rješenje je $y = C_1y_1 + C_2y_2$.

30. Riješiti jednačinu $xy'' - (x+1)y' + y = 0$, ako je $y_1 = e^x$ partikularno rješenje.
Rezultat. $y = C_1e^x + C_2(x+1)$.

31. Riješiti jednačine:

(a) $y'' - 4y' + 3y = 0$,
(b) $y''' + 27y = 0$,
(c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Rješenje.

(a) Karakteristična jednačina

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

ima korijene $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$, kako su oni realni i različiti opšte rješenje je

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x}.$$

(b) Karakteristična jednačina $\lambda^3 + 27 = 0$ ima rješenje

$$\lambda_1 = -3, \lambda_{2,3} = \frac{3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}.$$

Prema tome, opšte rješenje date jednačine je

$$y = C_1e^{-3x} + e^{\frac{3x}{2}}\left(C_2\cos\frac{3\sqrt{3}x}{2} + C_3\sin\frac{3\sqrt{3}x}{2}\right).$$

(c) Karakteristična jednačina $(\lambda-1)^3 = 0$ ima korijen $\lambda = 1$ višestrukosti 3. Opšte rješenje je

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x.$$

32. Naći opšte rješenje jednačine $y'' + y = \tan x$.
Rješenje. Opšte rješenje jednačine

$$y'' + y = 0$$

je

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Koristimo metodu varijacije konstanti. Rješenje tražimo u obliku

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

a funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ nalazimo rješavajući sistem

$$\begin{aligned} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x &= 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x &= \tan x. \end{aligned}$$

Imamo

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

$$C_2'(x) = \sin x.$$

Prema tome,

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \sin x - \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + D_1,$$

$$C_2(x) = -\cos x + D_2.$$

Opšte rješenje date jednačine je

$$y = D_1 \cos x + D_2 \sin x - \cos x \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|.$$

33. Riješiti jednačinu $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}$.
Rješenje. Opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine je

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Odredimo funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ iz sistema

$$C_1'(x) e^{3x} + C_2'(x) x e^{3x} = 0$$

$$3C_1'(x) e^{3x} + (1 + 3x) C_2'(x) e^{3x} = x e^{3x}.$$

Dobijamo

$$C_1'(x) = -x^2 \text{ i } C_2'(x) = x,$$

pa, važi

$$C_1(x) = -\frac{x^3}{3} + D_1 \text{ i } C_2(x) = \frac{x^2}{2} + D_2.$$

Opšte rješenje je

$$y = D_1 e^{3x} + D_2 x e^{3x} - \frac{x^3}{3} e^{3x} + \frac{x^3}{2} e^{3x} = D_1 e^{3x} + D_2 x e^{3x} + \frac{x^3}{6} e^{3x}.$$

34. Riješiti jednačinu $y''' + y'' + y' + y = xe^x$.
Rezultat. $y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \dfrac{(2x-3)e^x}{8}$.

35. Riješiti jednačinu $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$.
Rješenje. Opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine je

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p = (ax^2 + bx + c)e^{3x},$$

uvrštavanjem u datu jednačinu nalazimo

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 1.$$

Prema tome, opšte rješenje date jednačine je

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right).$$

36. Riješiti jednačinu $x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' = 0$.
Rješenje. Jednačina je Ojlerova, pa se smjenom $x = e^t$ transformiše u jednačinu sa konstantnim koeficijentima nezavisno promjenljive t,

$$y_t''' = 0.$$

Dobijamo

$$y = C_1 + C_2 t + C_3 t^2,$$

vraćajući smjenu slijedi

$$y(x) = C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 \ln^2|x|, \quad (x \neq 0).$$

37. Riješiti jednačinu $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' + y = 4\cos\ln|1+x|$.
Rješenje. Smjeno $1 + x = e^t$ jednačina se transformiše u

$$y'' + y = 4\cos t. \tag{6.68}$$

Opšte rješenje jednačine (6.68) je

$$y = C_1 \sin t + C_2 \cos t = 2t \sin t. \tag{6.69}$$

Koristeći $t = \ln|1+x|$, iz (6.69) slijedi opšte rješenje date jednačine

$$y = C_1 \sin\ln|1+x| + C_2 \cos\ln|1+x| + 2\ln|1+x| \sin\ln|1+x|, \quad (x \neq -1).$$

38. Riješiti jednačinu $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$.
Rješenje. Jednačinu možemo zapisati u obliku

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \ln y.$$

Nakon smjene, $\ln y = z$ dobijamo jednačinu $z'' = z$, odakle slijedi

$$z = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \text{ tj. } y = e^{C_1 e^x + C_2 e^{-x}}.$$

39. Odrediti partikularno rješenje jednačine $2yy'' - 3y'^2 = 4y^3$, koje ispunjava uslove $y_p(0) = 1$, $y_p'(0) = 0$.
Rješenje. Smjenom $y = \dfrac{1}{z^2}$ dobijamo jednačinu $z'' + z = 0$, odakle je $z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Opšte rješenje polazne jednačine je

$$y = \frac{1}{(C_1 \cos x + C_2 \sin x)^2}.$$

Traženo partikularno rješenje je $y_p = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

40. Riješiti jednačinu $(xy' - y)^2 + x^2 yy'' = 0$.
Rješenje. Smjenom $y^2 = z$ jednačina se transformiše u

$$x^2 z'' - 2xz' + 2z = 0,$$

a ovo je Ojlerova jednačina koja ima opšte rješenje $z = C_1 x + C_2 x^2$. Prema tome, opšte rješenje date jednačine je

$$y^2 = C_1 x + C_2 x^2.$$