III Системи диференцијалних једначина

1. Основни појмови и дефиниције

Нека је I отворен интервал у $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ n-димензионални Еуклидов простор и G област у простору $I\times\mathbb{R}^n$. Нека су $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ непрекидне функције у G од $n+1$ реалних променљивих. Решење система диференцијалних једначина

(1) $\quad x_i'(t) = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i=1,\dots,n$

у интервалу I је свака n-торка диференцијабилних функција $(y_1(t), \dots, y_n(t))$ за које на I важи

$$y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad i=1,\dots,n,$$

$$(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \in G.$$

Ако функције $y_i(t)$, $i=1,\dots,n$ задовољавају услов

(2) $\quad y_i(t_0) = x_i^0, \quad i=1,\dots,n$

где су $t_0, x_i^0, i=1,\dots,n$ дати реални бројеви такви да је $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in G$ онда је посматрана n-торка решење почетног проблема (1) и (2).

Ради краткоће у запису уведимо следеће ознаке.

Са x означавамо тачку у $\mathbb{R}^n$ чије су координате $(x_1, \dots, x_n)$, што значи

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad \text{где је}$$

$(e_1,\dots,e_n)$ база у $\mathbb{R}^n$.

Са (t,x) означавамо тачку $(t,x_1,\dots,x_n)\in I\times\mathbb{R}^n$, а са $f(t,x)$ векторску функцију $f: I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$,

$$f(t,x)=(f_1(t,x),\dots,f_n(t,x)),$$

где су $f_i(t,x)$ реалне функције $f_i: I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

На исти начин, извод и интеграл векторске функције $g(t)$ преко компоненти $g_i(t)$, $i=1,\dots,n$ дефинишу се као

$$g'(t)=(g_1'(t),\dots,g_n'(t)),$$

$$\int_a^b g(t)=\left(\int_a^b g_1(t)dt,\dots,\int_a^b g_n(t)dt\right).$$

Сада се почетни проблем (1),(2) може писати у облику

$$(3)\qquad x'(t)=f(t,x(t))$$

$$x(t_0)=x^0.$$

За њега важе исти резултати доказани у Глави I.

Норма вектора $\|x\|$ вектора $x=(x_1,\dots,x_n)$ дефинише се као

$$\|x\|=\sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Вриједи

$$\|\alpha y\|\le|\alpha|\,\|y\|,$$

$$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$$

$$\left\|\int_a^b x(t)dt\right\|\le\left|\int_a^b\|x(t)\|dt\right|.$$

2. Егзистенција и јединственост

<u>Теорема 1.</u> (Пеано) Нека је функција $f(t,x)$ непрекидна у затвореној области $G\subset I\times\mathbb{R}^n$,

$$G=\{(t,x_1,\dots,x_n): |t-t_0|\le a,\ \|x-x^0\|\le b\},$$

тада почетни проблем (3) има бар једно решење дефинисано у $[t_0-h, t_0+h]$, где је

$$h=\min\{a, \frac{b}{M}\}, \quad M=\sup_G\|f(t,x)\|.$$

<u>Теорема 2.</u> (Picard, Lindelöf) Нека је функција $f(t,x)$ непрекидна у $G\subset I\times\mathbb{R}^n$,

$$G=\{(t,x): |t-t_0|\le a, \ \|x-x^0\|\le b\}$$

и задовољава Липшицов услов по x, тј. постоји $L>0$ такво да је у G

$$(4) \quad \|f(t,x')-f(t,x'')\|\le L\|x'-x''\|,$$

тада постоји јединствено решење почетног проблема (3) које је дефинисано у $I=[t_0-h, t_0+h]$, где је $h=\min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M=\sup_G\|f(t,x)\|$.

<u>Доказ:</u> Довољно је посматрати интервал $I=[t_0, t_0+h]$, јер се сменом $u=2t_0-t$ I пресликава на $[t_0-h, t_0]$.

а) Егзистенција.

Дефинишимо низ функција $\{y_k(t)\}$ са

$$y_0(t)=x^0$$

$$y_k(t)=x^0+\int_{t_0}^{t} f(s, y_{k-1}(s))ds, \quad k=1,2,\dots$$

За $t\in I$ чланови низа су дефинисани јер $(t, y_k(t))\in G$. Наиме,

$$\|y_1(t)-x^0\|=\left\|\int_{t_0}^{t} f(s,x^0)ds\right\|, \text{ па је}$$

$$\|y_1(t)-x^0\|\le Mh\le b.$$

Претпоставимо да $(t, y_{k-1}(t))\in G$ за $t\in I$. Сада је

$$\|f(t, y_{k-1}(t))\| \leq M \quad \text{и}$$

$$\|y_k(t) - x^0\| \leq \int_{t_0}^{t} M ds \leq Mh \leq b, \text{ па}$$

$(t, y_k(t)) \in G$ за $t \in I$, $k \in \mathbb{N}$.

Покажимо индукцијом да је

$$\|y_{k+1}(t) - y_k(t)\| \leq M L^k \frac{(t-t_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

За $k=0$ је

$$\|y_1(t) - y_0\| \leq \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x^0) ds \right\| \leq M(t-t_0).$$

Нека је

$$\|y_k(t) - y_{k-1}(t)\| \leq M L^{k-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!}.$$

Због Липшицовог услова је

$$\|y_{k+1}(t) - y_k(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))) ds \right\| \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} L \|y_k(s) - y_{k-1}(s)\| ds \leq \int_{t_0}^{t} M L^k \frac{(s-t_0)^k}{k!} ds = M L^k \frac{(t-t_0)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Сада имамо

$$\|y_{n+p}(t) - y_n(t)\| = \left\| \sum_{k=n}^{n+p} y_{k+1}(t) - y_k(t) \right\| \leq \sum_{k=n}^{n+p} \|y_{k+1}(t) - y_k(t)\|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{n+p} M L^k \frac{(t-t_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

За свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је

$$\|y_{n+p}(t) - y_n(t)\| \leq Mh \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(Lh)^n}{n!} \leq \varepsilon$$

На основу Кошијевог критерија униформне конвергенције постоји непрекидна функција $y(t)$ тако да

$$y_n(t) \to y(t), \quad n \to +\infty$$

униформно и $(t, y(t)) \in G$ јер је G затворена област.

Покажимо да је $y(t)$ решење датог проблема.

Проблем (3) је еквивалентан са једначином

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds.$$

Довољно је показати да је

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds.$$

Како $y_n(t) \to y(t)$, $n \to +\infty$ униформно у I то због непрекидности функције f имамо

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\,ds = \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to+\infty} f(s, y_{n-1}(s))\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$$

Очигледно је $y(t_0) = x^0$.

Јединственост. Нека је и $z(t)$ решење проблема (3).

Тада је $z(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\,ds$.

Сада је

$$\|y_k(t) - z(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \left(f(s, y_{k-1}(s)) - f(s, z(s))\right) ds \right\| \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} L \|y_{k-1}(s) - z(s)\|\,ds \le b L^k \frac{(t-t_0)^k}{k!}.$$

Сада $z(t) = \lim_{k\to+\infty} y_k(t) = y(t)$.

3. Зависност решења од почетних услова и параметара.

<u>Теорема 1.</u> Нека су функције $x_1(t)$ и $x_2(t)$ диференцијабилне на $[a,b]$ и задовољавају услове

$$\|x_1(a)-x_2(a)\|\le\delta$$

$$\|x_i'(t)-f(t,x_i(t))\|\le\varepsilon_i,\quad i=1,2,$$

и нека функција f задовољава Липшицов услов по x, тада је за све $t\in[a,b]$

$$\|x_1(t)-x_2(t)\|\le\delta e^{L(t-a)}+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{e^{L(t-a)}-1}{L},$$

где је L Липшицова константа.

<u>Последица 2.</u> Ако је $x_1(a)=x_2(a)$ и

$$\|x_i'(t)-f(t,x_i(t))\|\le\varepsilon_i,\quad i=1,2$$

тада је

$$\|x_1(t)-x_2(t)\|\le(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\cdot\frac{e^{L(t-a)}-1}{L}.$$

<u>Последица 3.</u> Ако је $x_i'(t)=f(t,x_i(t))$, $i=1,2$ и тада је ~~$|x_1(a)-x_2(a)|$~~

$$\|x_1(t)-x_2(t)\|\le\|x_1(a)-x_2(a)\|e^{L(t-a)},\quad t\in[a,b]$$

4. Линеарни системи

Систем једно диференцијалних једначина

$$x_i'(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad , \quad i=1,\dots,n$$

код кога су функције f_i, $i=1,\dots,n$ линеарне по свим функцијама x_i тј.

$$(1) \qquad x_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + b_i(t), \quad i=1,\dots,n$$

назива се линеарни систем диференцијалних једначина.

Ако је $b_i(t)=0$, $i=1,\dots,n$ систем (1) се назива хомоген, а ако је $b_i(t)\neq 0$ бар за једно $i\in\{1,\dots,n\}$ онда се назива нехомоген.

Систем (1) краће пишемо у векторско-матричној форми.

Нека је

$$x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T, \quad b(t) = [b_1(t), \dots, b_n(t)] \text{ и}$$

$$A(t) = [a_{ij}(t)] = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Даље, нека је

$$A'(t) = [a_{ij}'(t)], \quad \int_a^b A(t)dt = [\int_a^b a_{ij}(t)dt]$$

тада се систем (1) пише у матрично-векторској форми.

$$(2) \qquad x'(t) = A(t)x(t) + b(t).$$

Обично се посматра и почетни услов

$$(3) \qquad x(t_0) = x^0.$$

<u>Теорема 1</u>. Егзистенција и јединственост. Нека су функције $A(t)$ и $b(t)$ непрекидне на $I=[t_0-a, t_0+a]$ и нека је $\|x^0\|<+\infty$, тада постоји јединствено решење почетног проблема (2)-(3) које је дефинисано на целом I.

Доказ: Дефинишимо низ функција $\{y_k(t)\}$ на сљедећи начин:

$$y_0(t)=x^0,$$
$$y_k(t)=x^0+\int_{t_0}^{t}[A(s)y_{k-1}(s)+b(s)]ds, \quad t\in I.$$

Нека је $M=\max\{\sup_t\|A(t)\|, \sup_t\|b(t)\|\}$, $\|A\|=\sum_i\sum_j |a_{ij}(t)|$.

Тада за свако $t\in I$ важи

$$\|y_{k+1}(t)-y_k(t)\|\leq(\|x^0\|+1)\cdot\frac{(M|a|)^{k+1}}{(k+1)!}$$

што се показује индукцијом.

Сада тврдња слиједи као и у скаларном случају.

Напомена.

1. Код линеарног система Липшицов услов је испуњен на интервалу $I=[t_0-a, t_0+a]$ ако су функције $A(t)$, $b(t)$ непрекидне. Наиме, због $\|A(t)\|\leq L$ за све $t\in I$ имамо

$$\|A(t)x^1(t)+b(t)-A(t)x^2(t)-b(t)\|\leq L\|x^1(t)-x^2(t)\|.$$

5. Хомогени линеарни системи.

Систем облика

(1) $\quad x'=A(t)x$

гдје се за матричну функцију $A(t)$ формата $m\times n$ претпоставља да је непрекидна на I назива се хомогени линеарни систем.

Очигледно је функција $x(t)=0$ рјешење система (1) које задовољава почетни услов $x(t_0)=0$. На основу теореме 1 (3.4) то је и једино рјешење.

Дефиниција 1. За векторске функције $f_i(t)$, $i=1,\dots,n$ се каже да су линеарно зависне на I ако постоје скалари c_i који нису сви једнаки нули такви да је за све $t\in I$

(2) $c_1 f_1(t)+\dots+c_n f_n(t)=0.$

За векторске функције које нису линеарно зависне у I каже се да су линеарно независне.

Дефиниција 2. За скуп вектора S векторског простора W каже се да чине његову базу ако су линеарно независни и ако се сваки вектор из W може изразити као линеарна комбинација вектора из S. Број елемената базе векторског простора W назива се димензија од W.

Теорема 3. Скуп V рјешења система (1) на интервалу I чини n-димензионални векторски простор над R.

Доказ: Да је V векторски простор следи тривијално. Покажимо на примјер да

$u_1(t), u_2(t)\in V \Rightarrow \alpha_1 u_1(t)+\alpha_2 u_2(t)\in V$ за свако $\alpha_1,\alpha_2\in R$.

$(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2)' = \alpha_1 u_1'+\alpha_2 u_2' = \alpha_1 A(t)u_1+\alpha_2 A(t)u_2 = A(t)(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2).$

Покажимо да је V димензије n, тј. да постоји n линеарно независних елемената из V таквих да се свако рјешење система (1) може приказати као њихова линеарна комбинација.

Нека су $u_i(t)$, $i=1,\dots,n$ рјешења система (1) која задовољавају почетне услове $u_i(t_0)=e_i$, $t_0\in I$, гдје је

$e_i=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ тј. тачка у R^n чија је i-та координата једнака 1, а све остале 0. Та рјешења на основу Теореме 1 (3.4.) постоје и јединствена.

Покажимо да су она линеарно независна.
Нека за све $t \in I$ и за неке $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$ важи

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(t) = 0.$$

Тада за $t = t_0$ имамо

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0.$$

Одавде је $\alpha_i = 0$, $i=1,\dots,n$.

Нека је $v(t)$ једно решење система (1) које задовољава почетни услов $v(t_0) = v^0$, где је $v^0 = \sum_{i=1}^{n} v_i^0 e_i$.

Тада је и функција

$$\bar{v}(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i^0 u_i(t)$$

решење система (1) за које важи почетни услов

$$\bar{v}(t_0) = v^0.$$

Дакле, $v(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i^0 u_i(t)$ због теореме 1 (3.4.)

<u>Дефиниција 4.</u> Свака база векторског простора V назива се фундаментални скуп решења система (1).

<u>Дефиниција 5.</u> Нека је $u_i(t)$, $i=1,\dots,n$ један фундаментални скуп решења система (1), а c_i, $i=1,\dots,n$ произвољне константе, тада се решење

$$(3) \quad u(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(t)$$

назива опште решење система (1).

<u>Дефиниција 6.</u> Матрица са n врста чије су колоне рјешења система (1) на I назива се матрица рјешења тога система.

<u>Дефиниција 7.</u> Матрица рјешења система (1) чије су колоне линеарно независне назива се фундаментална матрица тог система.

Нека је $\Phi(t)$ једна фундаментална матрица система (1) и c вектор са компонентама $c_1,\dots,c_n$, тада се опште рјешење система (1) може представити у облику

$$(4)\qquad x(t)=\Phi(t)\,c.$$

Из (4) се види да је за налажење свих рјешења система (1) довољно наћи једну фундаменталну матрицу. Дајемо једноставан критериј када је матрица рјешења система фундаментална.

<u>Лема 8.</u> Нека је $A(t)=[a_{ij}(t)]$ непрекидна матрична функција формата $n\times n$ у I. Тада за сваку матрицу $n\times n$ рјешења $\Psi(t)=[\psi_{ij}(t)]$ система (1) у I важи формула Liouvillea (Abela)

$$(5)\qquad \det\Psi(t)=\det\Psi(t_0)\,e^{\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}A(s)\,ds}.$$

<u>Доказ:</u> Према дефиницији 6 имамо

$$(6)\qquad \psi'_{ij}(t)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\psi_{kj}(t)\qquad i,j=1,\dots,n$$

С друге стране

$$(7)\qquad (\det\Psi(t))'=\sum_{i=1}^{n}\det\Psi_i(t),$$ гдје је

$\Psi_i(t)$ матрица која се добија из $\Psi(t)$ када се елементи $\psi_{ij}(t)$, $j=1,\dots,n$ i-те врсте замене за изводима $\psi_{ij}'(t)$.

Из (6) користећи особине детерминанти имамо

$$\det \Psi_i(t) = a_{ii}(t)\det \Psi(t)$$

па из (7) следи

$$(\det \Psi(t))' = \operatorname{tr} A(t) \det \Psi(t).$$

<u>Теорема 9.</u> Матрица решења $\Phi(t)$ система (1) је фундаментална матрица тог система на I акко за свако $t \in I$ вреди

$$\det \Phi(t) \neq 0.$$

<u>Доказ.</u> Услов је потребан.

Нека је Φ фундаментална матрица решења система (1)

Тада је ~~за~~ решење $u(t)$

$$u(t) = \Phi(t) c, \quad t \in I$$

где је c неки константни вектор.

$\Phi(t)$ је фундаментална матрица, па за свако $t_0 \in I$ систем алгебарских једначина

$$u(t_0) = \Phi(t_0) c \quad \text{има}$$

јединствено решење по $c_1, \dots, c_n$. Дакле $\det \Phi(t_0) \neq 0$ за ~~свако $t_0 \in I$~~. па према леми 8 је $\det \Phi(t) \neq 0$ за све $t \in I$.

Услов је довољан.

Ако је $\det \Phi(t) \neq 0$ за свако $t \in I$ тада су колоне матрице решења очигледно линеарно независни вектори, па је $\Phi(t)$ према дефиницији 7 фундаментална матрица.

6. Нехомогени линеарни системи

Систем облика

(1) $x' = A(t)x + b(t), \quad t \in I$

гдје је $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$, $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n}$, $b(t) = [b_1(t), \dots, b_n(t)]^T$, $t \in I$

назива се нехомогени линеарни систем ако је $b \not\equiv 0$.

Ако је позната фундаментална матрица $\Phi(t)$ система

(2) $x' = A(t)x, \quad t \in I$

тада се може наћи једно (партикуларно) рјешење система (1). Поступак помоћу кога се долази до партикуларног рјешења је познат под именом Лагранжова метода варијације константата. Основна идеја је сљедећа. Ако је $\Phi(t)$ фундаментална матрица система (2) његово опште рјешење је дато са

$$u(t) = \Phi(t)c.$$

Питање је да ли је могуће одредити c као функцију од t тако да $\Phi(t)c(t)$ буде рјешење система (1).

<u>Теорема 1.</u> Нека је $\Phi(t)$ фундаментална матрица хомогеног дијела система (1) тада је функција

(3) $$u(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\, b(s)\, ds, \quad t \in I$$

рјешење система (1) које задовољава почетни услов $u(t_0) = 0$, $t_0 \in I$

<u>Доказ:</u> Нека је $u(t) = \Phi(t)c$ рјешење система (2). Претпоставимо да је c функција од t. Тада је

$$u'(t)=\phi'(t)c(t)+\phi(t)c'(t).$$

Због (1) имамо

(4) $\phi'(t)c(t)+\phi(t)c'(t)=A(t)\phi(t)c(t)+b(t).$

$\phi(t)$ је фундаментална матрица система (2), па имамо

$$\phi'(t)=A(t)\phi(t).$$

Сада се (4) своди на

(5) $$\phi(t)c'(t)=b(t),\quad t\in I.$$

Како је $\det\phi\neq 0$ имамо да је

$$c(t)=\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)b(s)ds.$$

Дакле,

$$u(t)=\phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)b(s)ds.$$

Сада се опште рјешење система (1) може једноставно одредити.

<u>Теорема 2.</u> Нека је $u_p(t)$ неко рјешење система (1), а $u_h(t)$ опште рјешење његовог хомогеног дијела, тада је

$$u(t)=u_h(t)+u_p(t),\quad t\in I$$

опште рјешење система (1).

<u>Доказ:</u> За свако $t\in I$ је

$$u'(t)=u_h'(t)+u_p'(t)=A(t)u_h(t)+A(t)u_p(t)+b(t)=A(t)u(t)+b(t),$$

па је $u(t)$ рјешење система (1).

Како је $u_h(t)=\phi(t)c$ и $\det\phi(t)\neq 0$, а c произвољни вектор то за произвољни почетни услов

$$u(t_0)=y_0$$

систем алгебарских једначина

$$y_0-u_p(t_0)=\phi(t_0)c$$

има јединствено решење по c_i, $i=1,\dots,n$ јер је $\det\phi(t_0)\neq 0$.

Значи, вектор c се може изабрати тако да $u(t)$ задовољава ~~почетне услове~~ произвољне почетне услове, а тиме је и окарактерисано опште решење.

7. Линеарни системи са константним коефицијентима

Посматраћемо хомогене системе са константним коефицијентима, тј.

(1) $$x'=Ax,$$

где је матрица A константна. У овом случају се може експлицитно конструисати фундаментална матрица система (1), а на тај начин и одредити опште решење.

Дефиниција 1. Ненегативан реалан број

$$\|A\|=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|$$

назива се норма матрице A.

Важи

$$\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|,$$

$$\|AB\|\le\|A\|\,\|B\|.$$

Дефиниција 2. За низ матрица (A_k) кажемо да конвергира матрици A кад $k\to+\infty$, ако низ реалних бројева $\|A-A_k\|$ тежи нули кад $k\to+\infty$.

<u>Дефиниција 3.</u> $$e^A=E+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots,$$

гдје је E јединична матрица формата $n\times n$, истог формата је и A.

Ред $$E+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots$$

конвергира у смислу дефиниције 2. Наиме, имамо
$$\|S_{n+p}-S_n\|=\Big\|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{A^k}{k!}\Big\|\le\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\|A\|^k}{k!},$$

па конвергенција слиједи на основу Кошијевог принципа конвергенције.

Теорија редова са матричним члановима аналогна је теорији нумеричких редова.

Вриједи нпр.

(2) $$(e^{At})'=\Big(E+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{A^kt^k}{k!}\Big)'=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{A^kt^{k-1}}{(k-1)!}.$$

<u>Теорема 4.</u> Матрица

(3) $$\phi(t)=e^{At}$$

је фундаментална матрица система (1) на $\mathbb{R}$ и $\phi(0)=E$.

<u>Доказ:</u> Из (2) слиједи да је

$$(e^{At})'=Ae^{At},$$ па је e^{At} матрица рјешења

система (1). Поред тога због формуле Лиувила имамо

$$\det(e^{At}) = e^{\operatorname{tr} At} \neq 0, \quad t \in I$$

па је $\Phi(t)$ фундаментална матрица система (1).

Очигледно је $\Phi(0) = E$.

<u>Последица 5.</u> Решење система

$$x' = Ax$$

са почетним условом

$$u(t_0) = x^0, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad \|x^0\| < +\infty$$

дато је са

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot x_0$$

$x(t) = e^{At}$

$x(t) = c e^{At}$

$x^0 = c e^{At_0}$

$c = x_0 e^{-At_0}$

<u>Последица 6.</u> Опште решење нехомогеног система са константним коефицијентима

$$x' = Ax + b(t), \quad t \in (a,b)$$

дато је са

$$u(t) = e^{At} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} b(s)\, ds, \quad t \in (a,b),$$

а решење које задовољава почетни услов $u(t_0) = x^0$ је

$$u(t) = e^{A(t-t_0)} x^0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} b(s)\, ds.$$

8. Једначине n-тог реда

1. Увод

Нека је функција f дефинисана у некој области D простора $I \times \mathbb{R}^n$. Функција $y(t)$ која је n-пута диференцијабилна је решење на I једначине n-тог реда

$$(1) \qquad y^{(n)} = f(t; y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

ако је

$$(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in D$$

и

$$y^{(n)} = f(t; y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad t \in I.$$

Ако $y(t)$ задовољава почетни услов

$$(2) \qquad y(t_0) = y_0^0, \ y'(t_0) = y_1^0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}^0$$

где $(t_0, y^0) \in D$ тада је $y(t)$ решење почетног проблема (1)-(2).

Једначина (1) је еквивалентна систему једначина првог реда.

Нека је
$$y(t) = x_1(t),$$
$$x_1'(t) = x_2(t)$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1}'(t) = x_n(t)$$
$$x_n'(t) = f(t, x_1, \dots, x_n).$$

Дакле, једначини (1) се придружује систем

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= f(t; x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

са почетним условом

(4) $x_1(t_0)=y_0^0, \quad x_2(t_0)=y_1^0, \dots, x_n(t_0)=y_{n-1}^0$.

<u>Теорема 1.</u> Ако је $y(t)$ решење почетног проблема (1)–(2) из ~~§3.7.2.~~ на I тада је векторска функција

$x(t)=[x_1(t),\dots,x_n(t)]^T$ решење почетног проблема (3)–(4)

и обратно.

Линеарна једначина n-тог реда је

(1) $\quad g_0(t)\, y^{(n)} + g_1(t)\, y^{(n-1)} + \dots + g_n(t)\, y = h(t),$

где су $g_0(t), \dots, g_n(t), h(t)$ дефинисане на интервалу I и $g_0(t) \neq 0, t \in I$.

Ако уведемо $L_n[\ ]$ диференцијални оператор са

$$L_n[\ ] = \sum_{i=0}^{n} a_i(t) \frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}},$$

где је $a_i(t) = \dfrac{g_i(t)}{g_0(t)}$, $\quad \varphi(t) = \dfrac{h(t)}{g_0(t)}$, $\quad \dfrac{d^0}{t^0} \stackrel{def}{=} 1$,

горњу једначину можемо писати са

(2) $\qquad L_n[y] = \varphi(t).$

Посматраћемо прво хомогену једначину

(3) $\qquad L_n[y] = 0.$

тада се једначина (3) може писати у матричном облику

(4) $$x' = A(t)x$$

где је $x = [x_1, \dots, x_n]$,

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & & -a_1(t) \end{bmatrix}.$$

Ако су сви коефицијенти $a_i(t)$ непрекидни у интервалу тада је и матрица $A(t)$ непрекидна, а функција $A(t)x$ је непрекидна у свакој области D из $I \times \mathbb{R}^n$ и задовољава Липшицов услов по x. Дакле, сви резултати из главе 3 важе и за линеарну једначину (1). ~~Па разматрани~~ Разматрања слична онима за системе једначина детаљније ћемо урадити за линеарне једначине n-тог реда са константним коефицијентима. Наиме, ефективна конструкција њихових решења је једноставнија него код система.

2. Хомогена линеарна једначина.

Показаћемо да је скуп решења једначине

(1) $$L_n[y] = 0$$

на неком интервалу I n-димензиони векторски простор над $\mathbb{R}$. На основу тога, као и у случају линеарног система, закључићемо како се формирају сва решења једначине (1) која задовољавају почетне услове

(2) $$y(t_0) = \alpha_0,\ y'(t_0) = \alpha_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1}, \quad t_0 \in I,\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \dots, n-1$$

Према теореми о егзистенцији и јединствености рјешења система

$$x' = A(t)x$$

таква рјешења постоје и јединствена су.

Због особина извода оператор $L_n[\ ]$ је линеаран.

Дакле,

$$L_n[c_1y_1+\dots+c_ny_n] = c_1L_n[y_1]+\dots+c_nL_n[y_n],$$

па ако су $y_i(t)$, $i=1,\dots,n$ рјешења једначине (1)
тада је

$$L_n[c_1y_1+\dots+c_ny_n]=0,$$

па је и $y(t)=c_1y_1(t)+\dots+c_ny_n(t)$ рјешење једначине (1).

Дефиниција 1. Рјешење ДЈ

(3) $y(t)=c_1y_1(t)+\dots+c_ny_n(t)$

Назива се опште рјешење једначине (1) у I ако рјешења $y_i(t)$, $i=1,\dots,n$ чине фундаментални скуп, тј. ако су линеарно независна у I.

Показаћемо да се као и код система једначина константе у (3) могу изабрати да задовољавају произвољно дате почетне услове (2), тј. да се из (3) могу добити сва рјешења.

Дефиниција 2. Нека су $y_1(t), y_2(t),\dots,y_n(t)$ рјешења једначине (1), тада се детерминанта

$$W(y_1,\dots,y_n)(t)=\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t)\\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}$$

назива Wronskijeva детерминанта рјешења $y_1(t),\dots,y_n(t)$ у тачки t.

Значај Вронскијеве детерминанте се види из следеће теореме.

Теорема 3. Да би $y_1(t),\dots,y_n(t)$ била линеарно независна рјешења у интервалу I једначине (1) потребно је и довољно да буде

$$W(t)\equiv W(y_1,\dots,y_n(t))(t)\neq 0 \quad \text{за све } t\in I.$$

Доказ: Услов је потребан. Претпоставимо да су посматрана рјешења линеарно независна али да постоји $t_0\in I$ тако да је $W(t_0)=0$.

Сада слиједи да систем хомогених алгебарских једначина

$$c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)+\dots+c_ny_n(t_0)=0$$

$$c_1y_1'(t_0)+c_2y_2'(t_0)+\dots+c_ny_n'(t_0)=0$$

(4)

$$\dots$$

$$c_1y_1^{(n-1)}(t_0)+c_2y_2^{(n-1)}(t_0)+\dots+c_ny_n^{(n-1)}(t_0)=0$$

чија је детерминанта $W(t_0)$ има рјешење $c_1,\dots,c_n$ у коме нису сви c_i, $i=1,\dots,n$ једнаки нули.

Формирајмо рјешење

$$z(t)=c_1y_1(t)+\dots+c_ny_n(t).$$

Због (4) оно задовољава почетне услове

$$z(t_0)=0,\quad z'(t_0)=0,\dots,z^{(n-1)}(t_0)=0.$$

Исте услове задовољава и рјешење $y(t)\equiv 0$. Сада на основу јединствености решења почетног проблема закључујемо да је $c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t) = 0$ за све $t \in I$,

што је у супротности са претпоставком да су $y_i(t)$, $i=1,\dots,n$ линеарно независна решења.

Услов је потребан. Нека је $W(t) \neq 0$ за све $t \in I$. Ако $y_i(t)$, $i=1,\dots,n$ не би била линеарно независна решења на I постојале би константе $c_1,\dots,c_n$ које нису све једнаке нули тако би за свако $t \in I$ важило

$$\begin{aligned} &c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t) = 0 \\ &c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t) + \dots + c_n y_n'(t) = 0 \\ &\dots\dots \\ &c_1 y_1^{(n-1)}(t) + c_2 y_2^{(n-1)}(t) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t) = 0. \end{aligned}$$

За фиксирано $t_0 \in I$ горњи систем је систем хомогених алгебарских једначина чија је детерминанта $W(t_0) \neq 0$, па је $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ једино решење тог система и $y_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$ су линеарно независна решења.

<u>Лема 4.</u> (формула Liouvillea, Abela)

Нека је t_0 произвољна тачка из интервала I, тада је

$$W(y_1,\dots,y_n)(t) = W(y_1,\dots,y_n)(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds}, \quad t \in I.$$

<u>Теорема 5.</u> Нека су $y_i(t)$, $i=1,\dots,n$ линеарно независна решења једначине (1) на интервалу I. Тада за свако решење $y(t)$ на I једначине (1) постоје константе c_i, $i=1,\dots,n$ такве да се $y(t)$ може представити у облику

$$y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+\dots+c_ny_n(t).$$

<u>Доказ:</u> Нека је $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $i=0,1,\dots,n-1$ и нека је $y(t)$ решење једначине (1) које задовољава почетни услов (2).

Формирајмо једначине

$$c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)+\dots+c_ny_n(t_0)=\alpha_0$$

$$c_1y_1'(t_0)+c_2y_2'(t_0)+\dots+c_ny_n'(t_0)=\alpha_1$$

$$\dots$$

$$c_1y_1^{(n-1)}(t_0)+c_2y_2^{(n-1)}(t_0)+\dots+c_ny_n^{(n-1)}(t_0)=\alpha_{n-1}.$$

Детерминанта овог система је $W(y_1,\dots,y_n)(t_0)$ и како су $y_i(t)$, $i=1,\dots,n$ линеарно независна решења $W(y_1,\dots,y_n)(t_0)\neq 0$. Дакле, горњи систем има јединствено решење по c_i, $i=1,\dots,n$. За тако одређене c_i, $i=1,\dots,n$ решење

$$z(t)=c_1y_1(t)+\dots+c_ny_n(t)$$

задовољава исте почетне услове као и решење $y(t)$. Због јединствености решења закључујемо да је $y(t)\equiv z(t)$.

2. Нехомогена једначина. Метод варијације константи.

Нека је $y_h(t)$ опште решење једначине

(1) $$L_n[y]=0,$$

а $y_p(t)$ партикуларно решење једначине

(2) $$L_n[y]=f(t).$$

Тада користећи линеарност оператора $L_n[\ ]$ и исти поступак као у доказу теореме о општем решењу хомогене линеарне једначине закључујемо да је

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

опште решење једначине (2).

Партикуларно решење $y_p(t)$ се може сличном методом као и у случају система диференцијалних једначина (метода варијације константи) добити полазећи од општег решења хомогене једначине (1).

<u>Теорема 1.</u> Нека је $y_1(t),\dots,y_n(t)$ један фундаментални скуп решења једначине (1) на интервалу I. Партикуларно решење једначине (2) које задовољава почетни услов $y_p(t_0)=0$ дато је са

(3) $$y_p(t)=\sum_{i=1}^{n} y_i(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_i(s)}{W(s)}f(s)\,ds,$$

где је $t_0\in I$, а $W_i(s)$, $i=1,\dots,n$ је Вронскијева детерминанта функција $y_1(t),\dots,y_n(t)$ у којој је i-та колона замењена са $\operatorname{col}(0,0,\dots,0,1)$.

Доказ: Нека је $y_1(t), \dots, y_n(t)$ фундаментални скуп рјешења једначине $L_n[y]=0$ у I. Одредићемо функције $c_1(t), \dots, c_n(t)$ тако да

(4) $$y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + \dots + c_n(t)y_n(t)$$

буде партикуларно рјешење у I једначине

(2) $$L_n[y] = f(t).$$

Диференцирањем у (4) добијамо

$$y'_p(t) = \sum_{i=1}^{n} c'_i(t)y_i(t) + c_i(t)y'_i(t) = \sum_{i=1}^{n} c'_i(t)y_i(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t)y'_i(t).$$

Поставимо услов за функције $c_i(t), i=1,\dots,n$

(5) $$\sum_{i=1}^{n} c'_i(t)y_i(t) = 0.$$

Сада је

(4') $$y'_p(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)y'_i(t).$$

Диференцирањем (4') имамо

$$y''_p(t) = \sum_{i=1}^{n} c'_i(t)y'_i(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t)y''_i(t)$$

и поставимо услов

(5') $$\sum_{i=1}^{n} c'_i(t)y'_i(t) = 0.$$

Настављајући овај поступак добијамо систем

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i(t)y_i(t) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i(t)y'_i(t) = 0$$

$$\dots$$

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i(t)y_i^{(n-2)}(t) = 0$$

и $$y_p^{(n-1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)y_i^{(n-1)}(t).$$

Диференцирањем последње релације добијамо

$$y_p^{(n)}(t)=\sum_{i=1}^{m} c_i'(t)y_i^{(n-1)}(t)+\sum_{i=1}^{m} c_i(t)y_i^{(n)}(t).$$

Ако поставимо услов $\sum_{i=1}^{m} c_i'(t)y_i^{(n-1)}(t)=f(t)$ имамо

$$y_p^{(n)}(t)=\sum_{i=1}^{m} c_i(t)y_i^{(n)}(t).$$

Дакле, вриједи следеће

$$(*)\quad \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} c_i'(t)y_i(t)=0\\ &\sum_{i=1}^{m} c_i'(t)y_i'(t)=0\\ &\quad\vdots\\ &\sum_{i=1}^{m} c_i'(t)y_i^{(n-2)}(t)=0\\ &\sum_{i=1}^{m} c_i'(t)y_i^{(n-1)}(t)=f(t), \end{aligned}$$

$$y_p^{(k)}(t)=\sum_{i=1}^{m} c_i(t)y_i^{(k)}(t),\quad k=1,\dots,n$$

Дакле, ако постоје функције $c_i(t)$, $i=1,\dots,n$ такве да вриједи $(*)$ закључујемо да је $y_h(t)+y_p(t)$ рјешење једначине

$$L_n[y]=f(t).$$

Међутим, како је $y_1,\dots,y_m$ фундаментални систем Вронскијева детерминанта је $W(y_1,\dots,y_m)(t)\neq 0$ $(\forall t\in I)$, па је

$$c_i'(t)=\frac{W_i(t)f(t)}{W(t)}.\quad \text{Дакле,}\quad c_i(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{W_i(s)}{W(s)}f(s)\,ds \text{ и}$$

$$y(t)=\sum_{i=1}^{m} y_i(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_i(s)}{W(s)}f(s)\,ds$$

Пример. Дата је нехомогена једначина $y''+2y'+y=e^{-t}\ln t$ чији је један фундаментални систем решења e^{-t}, te^{-t}. Одредити партикуларно решење.

$$y_1(t)=e^{-t}, \quad y_2(t)=te^{-t}$$

$$y(t)=c_1(t)e^{-t}+c_2 t e^{-t}$$

$$W(t)=\begin{vmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{vmatrix} = (1-t+t)e^{-2t}=e^{-2t}$$

$$W_1(t)=\begin{vmatrix} 0 & te^{-t} \\ 1 & (1-t)e^{-t} \end{vmatrix} = -te^{-t},$$

$$W_2(t)=\begin{vmatrix} e^{-t} & 0 \\ -e^{-t} & 1 \end{vmatrix} = e^{-t}$$

$$c_1(t)=-\int_{t_0}^{t} te^{t}e^{-t}\ln t\,dt = -\int_{t_0}^{t} s\ln s\,ds = -\frac{1}{2}t^2\ln t+\frac{t^2}{4}+k_1$$

$$c_2(t)=+\int_{t_0}^{t}\frac{e^{-t}}{e^{-2t}}e^{-t}\ln t\,dt = -\int_{t_0}^{t}\ln t\,dt = t\ln t-t+k_2$$

$$y(t)=c_1^{*}e^{-t}+c_2^{*}te^{-t}+\left(\frac{t^2}{4}-\frac{1}{2}t^2\ln t\right)e^{-t}+(t\ln t-t)te^{-t}$$

3. Хомогена једначина са константним коефицијентима.

Једначина $L_n[y]=0$ код које су сви коефицијенти a_i, $i=1,\dots,n$ реалне константе тј.

$$L_n[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny, \quad a_i\in\mathbb{R},\ i=1,\dots,n$$

Назива се хом. једн. са константним коефицијентима.

У овом случају фундаментални скуп решења се може формирати помоћу корена карактеристичне једначине

(1) $r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0.$

Наиме, ако се тражи решење једначине

(2) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n = 0$

у облику $y(t) = e^{rt}$, $r \in \mathbb{R}$ имамо

$$L_n[y] = p_n(t) e^{rt},$$

где је $p_n(t) = r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n.$

Како је $e^{rt} \neq 0$ то је $L_n[y] = 0$ када је $p_n(r) = 0$.

Дакле, ако су r_i, $i = 1, \dots, n$ корени карактеристичне једначине (1) тада су функције $y(t) = e^{r_i(t)}$, $i = 1, \dots, n$ решења једначине $L_n[y]$.

Ако је r_i комплексан $y(t) = e^{r_i(t)}$ је комплексна функција. Из ових решења формирамо реална решења користећи следећу лему.

Лема 1. Ако је $y(t) = u(t) + i v(t)$ решење једначине (2) тада су $u(t)$ и $v(t)$ решења једначине (2).

Теорема 2. Нека су r_i, $i = 1, \dots, s$ различити корени карактеристичне једначине вишеструкости m_i, тако да је $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$, тада су функције

(3) $e^{r_i(t)}, \ t e^{r_i(t)}, \ t^2 e^{r_i(t)}, \dots, t^{m_i - 1} e^{r_i(t)}, \quad i = 1, 2, \dots, s$

решења једначине $L_n[y] = 0$ на $\mathbb{R}$.

Како је $e^{r_i t}$ решење једначине $L_n[y]=0$ имамо ~~$L_n[e^{r_i t}]=0$.~~ $L_n[e^{r_i t}] = p_n(r)e^{r_i(t)}$

Диференцирањем k пута по r_i имамо

$$L_n[t^k e^{r_i t}] = e^{r_i t}\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} p_n^{(j)}(r_i)\, t^{k-j}\right).$$

Ако је r_i корјен вишеструкости m_i једначине

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

имамо

$$p_n(r_i) = p_n'(r_i) = \dots = p_n^{(m_i-1)}(r_i) = 0,$$

па је $p_n^{(j)}(r_i)=0$ за $j=0,\dots,k$, $k \le m_i-1$.

Дакле,

$$L_n[t^k e^{r_i t}] = 0.$$

Теорема 3. Рјешења (3) су линеарно независна на $\mathbb{R}$.

Доказ: Претпоставимо супротно. Тада постоје константе c_{ij}, $i=1,\dots,s$, $j=0,1,\dots,m_i-1$ не све једнаке нули тако да вриједи

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij}\, t^j e^{r_i t} \equiv 0,$$

тј.

$$\sum_{i=1}^{s} e^{r_i t} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij}\, t^j = 0$$

Нека је $p_i(t) = \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij}\, t^j$, $i=1,\dots,s$. Неки од њих полинома могу бити идентички једнаки нули али не сви. ~~Дакле~~, то

Нека је нумерација извршена тако да је

$p_i(t) \not\equiv 0$ у I за $i = 1, \dots, k$, $k \le s$ и

$p_i(t) \equiv 0$ у I за $i = k+1, \dots, s$.

Тада је $\sum_{i=1}^{k} e^{r_i t} p_i(t) \equiv 0$,

па је

$$\sum_{i=2}^{k} e^{(r_i - r_1)t} p_i(t) + p_1(t) = 0.$$

Диференцирањем l пута $l \le m_1$ добијамо

$$\sum_{i=2}^{k} e^{(r_i - r_1)t} p_{1i}(t) \equiv 0,$$

одавде је $\sum_{i=2}^{k} e^{r_i t} p_{1i}(t) \equiv 0$

где су p_{1i}, $i = 2, \dots, k$ полиноми истог степена као и p_i, $i = 2, \dots, k$.

Настављајући овај поступак добијамо

$e^{r_k t} p_{k-1\,k}(t) \equiv 0$, где је $p_{k-1\,k}(t)$ полином истог степена као и $p_k(t)$.

Дакле, добијамо контрадикцију.

<u>Формирање општег решења.</u>

4. Eulerova jednačina

Једначина облика

$$t^n y^{(n)} + a_1 t^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} t y' + a_n y = 0, \quad a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n$$

назива се Ојлерова диф. једначина реда n.

Смјеном $t = e^x$, $t > 0$ она се своди на једначину са константним коефицијентима.

Наиме,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{t} \quad \text{тј.} \quad t\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{t}\right)}{dt} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} - 1\right)y$$

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} - 1\right)y$$

Индукцијом се може показати да је

$$t^k \frac{d^ky}{dt^k} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} - 1\right)\left(\frac{d}{dx} - 2\right) \cdots \left(\frac{d}{dx} - k + 1\right)y.$$

<u>Примјер.</u> $t^3 y''' + t^2 y'' + 3ty' - 8y = 0$

$t = e^x$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{t}, \quad t^2\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} - 1\right) = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}$$

$$t^3 \frac{d^3y}{dt^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} - 1\right)\left(\frac{d}{dx} - 2\right)y = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} - 1\right)\left(\frac{dy}{dx} - 2y\right)$$

$$t^3\frac{d^3y}{dt^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} + 2y\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 2y\right)$$

$$t^3\frac{d^3y}{dt^3} = \frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}$$

$$y''' - 3y'' + 2y' + y'' - y' + 3y' - 8y = 0$$

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$$

$$r^3 - 2r^2 + 4r - 8 = 0$$

$$r^2(r-2) + 4(r-2) = 0$$

$$(r-2)(r^2+4) = 0$$

$$r_1 = 2, \quad r_{2,3} = \pm 2i$$

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = \cos 2x, \quad y_3 = \sin 2x$$

$$y_1(t) = t^2, \quad y_2 = \cos 2\ln|t|, \quad y_3 = \sin 2\ln|t|, \quad t \neq 0$$

5. Решавање помоћу степених редова

Нека је дата једначина

(1) $y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0$.

Ако су коефицијенти $a_i(t)$, $i=1,\dots,n$ аналитички у тачки t_0 (тј. могу се развити у тој тачки у конвергентан Тејлоров ред ~~у околини~~ полупречника конвергенције $r>0$) тада се t_0 назива обична (регуларна) тачка једначине (1)

Пример. Наћи у облику степеног реда решење почетног проблема

$$y'' + t y' + 3y = 0, \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1.$$

$a_1(t) = t$, $a_2(t) = 3$ су аналитичке функције у свакој тачки, $t_0 = 0$.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n t^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n t^{n-2}.$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n t^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 3 c_n t^n = 0$$

$$2c_2 + 3c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1) c_{n+2} + (n+3) c_n\right] t^n = 0$$

$$2c_2 + 3c_0 = 0, \quad (n+2)(n+1) c_{n+2} + (n+3) c_n = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$c_2 = -\frac{3 c_0}{2}, \quad c_{n+2} = -\frac{(n+3)}{(n+2)(n+1)} c_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$c_4 = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4} c_0, \quad c_{2n} = (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{2^n \cdot n!} c_0, \quad n \geq 1$$

$$c_{2n+1} = (-1)^n \cdot \frac{2^n \cdot (n+1)!}{(2n+1)!} c_1, \quad n \geq 1.$$

$$y(t) = c_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{2^n \cdot n!} t^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n (n+1)!}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

$$y_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{2^n \cdot n!} t^{2n}, \quad y_2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n (n+1)!}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

y_1, y_2 су линеарно независна рјешења.

$c_0 = a_0, \quad c_1 = a_1.$

<u>Теорема.</u> Нека је t_0 обична тачка једначине

(9) $y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$

тј. нека су Тејлорови редови у тачки t_0 коефицијената $a_i(t)$ конвергентни за све t такве да је $|t-t_0| < r_0$, $r_0 > 0$.

Тада за произвољне реалне бројеве α_k, $k=0,1,\dots,n-1$ почетни проблем

$$L_n[y] = 0, \quad y^{(k)}(t_0) = \alpha_k, \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

има јединствено аналитичко рјешење у тачки t_0 представљено редом $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (t-t_0)^k$ који конвергира за $|t-t_0| < r_0$.

Коефицијенти c_k се могу одредити директном замјеном редом у једначину (1), а $k!\,c_k = \alpha_k$ за $k=0,1,\dots,n-1$.

Доказ: За $n=2$, слично се изводи и у општем случају

$$y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0,$$

$$y(t_0)=\alpha_0,\ y'(t_0)=\alpha_1.$$

$$t_0=0.$$

$$(2)\quad a_1(t)=\sum_{i=0}^{\infty} p_i t^i, \quad a_2(t)=\sum_{i=0}^{+\infty} q_i t^i,$$

$$(3)\quad y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} q_n t^n \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)c_{n+1}t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} q_n t^n \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}t^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} p_k \cancel{(n+1-k)} c_{n+1-k}\Big)t^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} q_k c_{n-k}\Big)t^n = 0$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} p_k \cancel{t}(n+1-k)c_n$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} = -\sum_{k=0}^{n}\big((k+1)c_{k+1}p_{n-k} + c_k q_{n-k}\big), \quad n\geq 0$$

одакле, се могу израчунати c_n као линеарне комбинације α_0 и α_1.

Докажимо да је ред (3) конвергентан.

Како редови у (2) конвергирају, то је

$\lim |p_n r^n| = \lim |q_n r^n| = 0$, па постоји број $M>0$

тако да је

$$|p_n| \le M r^{-n}, \quad |q_n| \le M r^{-n}, \quad n=0,1,2,\dots$$

Дакле, важи

$$(n+2)(n+1)|c_{n+2}| \le M r^{-n} \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)|c_{k+1}| + |c_k| \right] r^k + M|c_{n+1}| r.$$

Дефинишимо низ a_n

$$a_0 = |c_0|, \quad a_1 = |c_1|,$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = M r^{-n} \sum_{k=0}^{n} \{ (k+1)a_{k+1} + a_k \} r^k + M a_{n+1} r, \quad n=0,1,\dots$$

Очигледно је

$$0 \le |c_n| \le a_n, \quad n=0,1,\dots$$

Показаћемо да је ред $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ конвергентан за $|t|<r$.

$$(n+1)n a_{n+1} = M r^{-n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)a_{k+1} + a_k \right] r^k + M a_n r,$$

$$n(n-1) a_n = M r^{-n+2} \sum_{k=0}^{n-2} \left[(k+1)a_{k+1} + a_k \right] r^k + M a_{n-1} r,$$

$$n(n+1) r a_{n+1} = M r^{-n+2} \sum_{k=0}^{n-2} \left[(k+1)a_{k+1} + a_k \right] r^k + M a_n r^2 +$$

$$+ M r^{-n+2} (n a_n + a_{n-1}) r^{n-1} = M r^{-n+2} + \sum_{k=0}^{n-2} \left[(k+1)a_{k+1} + a_k \right] r^k + M a_n r^2 +$$

$Mr(na_n + a_{n-1})$.

Одавде је

$$n(n+1)a_{n+1} \cdot r = n(n-1)a_n - Ma_{n-1}r + Ma_n r^2 + Mr(na_n + a_{n-1})$$

$$n(n+1)ra_{n+1} = (n(n-1) + Mr^2 + Mrn)a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n(n-1) + Mr(n+r)}{n(n+1)r} \to \frac{1}{r}, \quad n \to +\infty$$

Дакле, ред $\sum c_n t^n$ конвергира за свако $|t| < r$.

Тачка t_0 у којој бар један од коефицијената $a_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ није аналитичка функција назива се сингуларна тачка једначине

(1) $y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0$.

<u>Дефиниција</u>. Сингуларна тачка t_0 једначине (1) је регуларно сингуларна ако су функције

$$(t-t_0)a_1(t), \ (t-t_0)^2 a_2(t), \dots, (t-t_0)^n a_n(t)$$

аналитичке у тој тачки.

У случају када је тачка t_0 регуларно сингуларна за једначину имамо

(2) $(t-t_0)^n y^{(n)} + (t-t_0)^{n-1} b_1(t) y^{(n-1)} + \dots + b_n(t)y = 0$,

где су $b_i(t) = (t-t_0)^i a_i(t)$, $i = 1, \dots, n$

аналитичке функције у t_0.

Пример. Одредити опште решење у околини нуле једначине

$$2ty'' + y' - y = 0. \qquad y'' + \frac{1}{2t}y' - \frac{1}{2t}y = 0.$$

$$\cancel{2t^2y'' + ty' - ty = 0}$$

$$\cancel{b_1(t) = 2^{-1},\ b_2(t) = -\frac{t}{2}}$$

$t=0$ је регуларно сингуларна тачка.

Решење тражимо у облику

$$y(t) = t^r \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k, \quad c_0 \neq 0.$$

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+r)c_k t^{k+r-1}, \quad y''(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+r)(k+r-1)c_k t^{k+r-2}$$

$$2\sum_{k=0}^{+\infty}(k+r)(k+r-1)c_k t^{k+r-1} + \sum_{k=0}^{+\infty}(k+r)c_k t^{k+r-1} - \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^{k+r} = 0.$$

$$2\sum_{k=1}^{+\infty}(k+r+1)(k+r)c_{k+1}t^{k+r} + \sum_{k=1}^{+\infty}(k+r)c_{k+1}t^{k+r} - \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^{k+r} = 0$$

$$+\ 2r(r-1)c_0 t^{r-1} + rc_0 t^{r-1} = 0$$

(2) $2r(r-1) + r = 0$

(3) $(k+r)(2k+2r+1)c_{k+1} = c_k, \quad k \geq 0$

Једначина (2) назива се индексна једначина. Решења индексне једначине називају се експоненти диф. једначине.

$$r(2r-1)=0$$

$$r_1=\frac{1}{2},\ r_2=0$$

$r_1=\frac{1}{2}$

$$\frac{2k+3}{2}\cdot(2k+\cancel{3})c_{k+1}=c_k,\quad k\geq 0$$

$$c_{k+1}=\frac{1}{(k+1)(2k+3)}c_k,\quad k\geq 0$$

$$c_1=\frac{c_0}{1\cdot 3},\quad c_2=\frac{1}{2\cdot 5}c_1=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}c_0,$$

$$c_3=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cancel{3}\cdots 5\cdot 7}c_0,$$

$$c_k=\frac{c_0}{k!\ 3\cdot 5\cdots(2k+1)}=\frac{2^k c_0}{(2k+1)!},$$

$$y_1(t)=t^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{(2k+1)!}t^k,$$

$$r=0,\quad c_{k+1}=\frac{c_k}{(k+1)(2k+1)},\quad k\geq 0$$

$$c_k=\frac{2^k}{(2k)!}c_0,\quad k\geq 0$$

$$y_2(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{(2k)!}t^k,\quad y_2(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2t)^k}{(2k)!}$$

y_1, y_2 су линеарно независна рјешења.

Горњи поступак се зове метод Фробенијуса.

Посматрајмо општи случај. Нека је $t_0 = 0$ регуларно сингуларна. ~~тачка једначине~~ ~~Нека~~

(3) $$t^2 y'' + t b_1(t) y' + b_2(t) y = 0$$

при чему су $b_i(t)$, $i = 1,2$ аналитичке у $t=0$ и

$$b_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k t^k, \quad b_2(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k t^k$$ су конвергентни у $(-r_0, r_0)$.

Према методи Фробениуса тражимо решење у облику

$$y(t) = t^r \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k, \quad c_0 \neq 0, \quad t > 0.$$

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+r) c_k t^{k+r-1}, \quad y''(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+r)(k+r-1) c_k t^{k+r-2}.$$

Ако уврстимо у (3) имамо

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+r)(k+r-1) c_k t^{k+r} + \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k t^k \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (k+r) c_k t^{k+r} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k t^k \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^{k+r} = 0, \quad \text{тј.}$$

$$t^r \Big\{ \sum_{k=0}^{+\infty} (k+r)(k+r-1) c_k t^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k} (i+r) c_i t^i (\alpha_{k-i} t^{k-i} + \beta_{k-i} t^{k-i}) \Big\} = 0$$

$$t^r \Big\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \Big[(k+r)(k+r-1) c_k + \sum_{i=0}^{k} ((i+r)\alpha_{k-i} + \beta_{k-i}) c_i \Big] t^k + [r(r-1) + \alpha_0 r +$$

$$+ \beta_0] c_0 \Big\} = 0.$$

$$(k+r)(k+r-1) c_k + \sum_{i=0}^{k} [(i+r)\alpha_{k-i} + \beta_{k-i}] c_i = 0.$$

$$f(r) \equiv r^2 + (\alpha_0 - 1)r + \beta_0 = 0$$

$$f(r+k)\, c_k = -\sum_{i=0}^{k-1} [(i+r)\alpha_{k-i} + \beta_{k-i}]\, c_i, \quad k \geq 1$$

Пример. Беселова једначина.

Теорема 4.9. Нека су функције $b_1(t)$, $b_2(t)$ аналитичке у $t=0$ и нека редови

$$b_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k t^k, \quad b_2(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k t^k$$

конвергирају за $|t| < r_0$, $r_0 > 0$.

Тада за $0 < |t| < r_0$ постоји рјешење једначине

$$t^2 y'' + t\, b_1(t)\, y' + b_2(t)\, y = 0$$

облика $\quad y_1(t) = |t|^{r_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$

за које се коефицијенти c_k могу рекурентно одредити из једнакина

$$(4)\quad c_0 = 1, \quad f(r_1+k)\, c_k = -\sum_{i=0}^{k-1} [(i+r_1)\alpha_{k-i} + \beta_{k-i}]\, c_i, \quad k \geq 1.$$

Овдје је $f(r)$ индексни полином тј.

$$f(r) = r^2 + r(\alpha_0 - 1) + \beta_0, \text{ а}$$

r_1 је онај од експонената једнакине (3) у регуларно сингуларној тачки $t_0 = 0$ за који важи

$$\operatorname{Re} r_1 \geq \operatorname{Re} r_2.$$

Ако $r_1 - r_2$ није нула или природан број за $0<|t|<r_0$ постоји и други решење једначине (3) облика

$$y_2(t) = t^{r_2} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^* t^k ,$$

где се коефицијенти c_k^* могу одредити из једначина (4) у којима је r_1 замењено са r_2, а c_k са c_k^*, $y_1(t)$ и $y_2(t)$ су линеарно независна решења.

<u>Теорема.</u> Нека су функције $b_1(t)$ и $b_2(t)$ аналитичке у $t_0=0$ и нека њихови степени редови конвергирају за $|t|<r_0$, $r_0>0$.

а) Ако је $r_1 = r_2$ за $0<|t|<r_0$ постоје два линеарно независна решења једначине (3) облика

$$y_1(t) = |t|^{r_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k , \quad c_0 \neq 0$$

$$y_2(t) = |t|^{r_1+1} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k + y_1(t) \ln|t| , \quad b_0 \neq 0$$

б) Ако је $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$, за $0<|t|<r_0$ постоје два линеарно независна решења облика

$$y_1(t) = |t|^{r_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k , \quad c_0 \neq 0$$

$$y_2(t) = |t|^{r_2} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k + a\, y_1(t) \ln|t| , \quad b_0 \neq 0,$$

где је a константа која може бити једнака и нули.

Пример. Беселова једначина. Нека је α константа и $\operatorname{Re}\alpha>0$

Једначина $t^2y''+ty'+(t^2-\alpha^2)y=0$ је Беселова једначина реда α.

$\alpha=0$.

$$t^2y''+ty'+t^2y=0$$

$t>0$, $c_0\neq 0$, $y_1(t)=t^r\sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_kt^k$.

$$y_1'(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+r)c_kt^{k+r-1},\quad y_1''(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+r)(k+r-1)c_kt^{k+r-2}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+r)(k+r-1)c_kt^{k+r}+\sum_{k=0}^{+\infty}(k+r)c_kt^{k+r}+\sum_{k=0}^{+\infty}c_kt^{k+r+2}=0.$$

$$\left(r(r-1)c_0+rc_0\right)t^r+\left((r+1)r+r+1\right)c_1t^{r+1}+\sum_{k=2}^{+\infty}\left((k+r)^2c_k+c_{k-2}\right)t^{k+r}=0$$

$r^2=0$, $(r+k)^2c_k+c_{k-2}=0$, $k\geq 2$

$r=0$, $c_1=0$, $c_{2k+1}=0$, $c_{2k}=\dfrac{(-1)^kc_0}{2^{2k}(k!)^2}$,

$$J_0(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^{2k},$$ Беселова функција прве нултог реда прве врсте.

$$y_2(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}b_kt^k+J_0(t)\ln t,\quad t>0.$$

$$b_1t+2^2b_2t^2+\sum_{k=3}^{+\infty}\left(k^2b_k+b_{k-2}\right)t^k+2tJ_0'(t)+(\ln t)\left(t^2J_0''+tJ_0'+t^2J_0\right)=0$$

$$b_1t+2^2b_2t^2+\sum_{k=3}^{+\infty}\left(k^2b_k+b_{k-2}\right)t^k=-2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k2kt^{2k}}{(k!)^22^{2k}},$$

$b_1=0$, $3^2 b_3+b_1=0$, $5^2 b_5+b_3=0$, $b_{2k+1}=0$, $k=0,1,\dots,$

$2^2 b_2=1$, $(2k)^2 b_{2k}+b_{2k-2}=\dfrac{(-1)^{k+1}\, k}{(k!)^2\, 2^{2k-2}}$, $k\geq 2$

$b_2=\dfrac{1}{2^2}$, $b_4=-\dfrac{1}{2^2\cdot 4^2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)$,

$$b_{2k}=\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}(k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\right).$$

Решење $y_2(t)$ обележава се са $K_0(t)$ и назива се Беселова функција нултог реда друге врсте

$$K_0(t)=-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\right)\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}+J_0(t)\ln t.$$

$K_0(t)$ је дефинисана за само $|t|>0$

$$R=\lim_{k\to\infty}4\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\right)}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}}\cdot\frac{[(k+1)!]^2}{(k!)^2}=\infty.$$

$K_0(t)$ и $J_0(t)$ су линеарно независна решења Беселове једначине за $|t|>0$.

Гранични проблеми

Нека ~~су $P(x)$ и $Q(x)$~~ је $P(x)$ непрекидно диференцијабилна и $Q(x)$ непрекидна на (a,b) и h, h', k, k' реални бројеви такви да је $h^2+h'^2 \neq 0$ и $k^2+k'^2 \neq 0$. Гранични проблем ~~другог реда~~ за линеарне једначине другог реда је дат са

$$(1) \qquad (P(x)y')' + Q(x)y = 0, \qquad a<x<b$$
$$h\,y(a) + h'y'(a) = 0, \quad k\,y(b) + k'y'(b) = 0.$$

<u>Пример.</u>
$$y'' + \lambda y = 0$$
$$y(0)=0, \; y(\pi)=0$$

1. $\lambda = 0$, $\quad y(x) = c_1 x + c_2$

$y(x) = 0$

2. $\lambda < 0$, $\quad y(x) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}\,x}$

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} \neq 0$$

Нема нетривијално решење

3. $\lambda > 0$, $\quad y(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x$

$c_1 = 0$, $\quad y(x) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x$

$\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$,

има нетривијално решење за $\lambda = n^2$, $n\in\mathbb{N}$

$$y_n(x) = c_n \sin n x, \quad n\in\mathbb{N}$$

Бројеви λ_n за које проблем има решење називају се сопствене вредности, а одговарајућа решења сопствене функције.

<u>Теорема</u>. (Sturm, О упоређивању). Нека су $P(x)$, $P'(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ непрекидне на $[a,b]$, $P(x)>0$ и $Q_2(x)\geq Q_1(x)$. Тада између двије узастопне нуле рјешења $y(x)$ једначине

(2) $$(P(x)y')' + Q_1(x)y=0$$

налази бар једна нула сваког рјешења $z(x)$ једначине

(3) $$(P(x)y')' + Q_2(x)y=0.$$

<u>Доказ</u>: Нека су x_1, x_2 двије узастопне нуле рјешења $y(x)$ једначине (2). Претпоставимо да постоји рјешење $z(x)$ једначине (3) које нема нула у (x_1,x_2).

Функције $y(x)$ и $z(x)$ можемо помножити константама, а да то не утиче на њихове нуле, па се без смањења општости може претпоставити да су $y(x)$ и $z(x)$ позитивне у (x_1,x_2).

Из (2) и (3) добијамо

$$(P(x)y')'z + Q_1(x)yz=0$$

$$(P(x)z')'y + Q_2(x)yz=0,$$

па је

$$(P(x)y')'z-(P(x)z')'y = (Q_2(x)-Q_1(x))yz.$$

Како је $(P(x)y')'z-(P(x)z')'y = P'(x)y'z+P(x)y''z - P'(x)z'y-P(x)z''y$

$= P'(x)(y'z-z'y)+P(x)(y''z-z''y) = (P(x)(y'z-z'y))'$,

имамо

$$(P(x)(y'z-z'y))' = (Q_2(x)-Q_1(x))yz.$$

Интеграцијом на (x_1,x_2) је

$$p(x_2)y'(x_2)z(x_2) - p(x_1)y'(x_1)z(x_1) = \int_{x_1}^{x_2}(Q_2(x)-q_1(x))yz\,dx.$$

$p(x_2), p(x_1)>0$, $y'(x_2)\le 0$, $y'(x_1)>0$, $z(x_1), z(x_2)>0$, па је

$$p(x_2)y'(x_2)z(x_2) - p(x_1)y'(x_1)z(x_1) < 0,$$

што је немогуће јер је $\int_{x_1}^{x_2}(Q_2(x)-q_1(x))yz\,dx \ge 0$.

Последица. Нуле двају линеарно независних решења једначине (1) се међусобно раздвајају.

Напомена. У теореми о упоређивању се могу узети двије функције $p_1(x), p_2(x)$ за које је $p_1(x)\ge p_2(x)$. То је Пиконеово уопштење Штурмове теореме о упоређивању.

За решавање граничног проблема (1) често је корисна (Prüfer) Пруферова метода.

Стављајући

$$(4)\qquad p(x)y' = z,$$

добијамо

$$z' + Q(x)y = 0.$$

Дакле, (1) је еквивалентно систему

$$(5)\qquad \begin{aligned} y' &= \frac{1}{p(x)}z \\ z' &= -Q(x)y \end{aligned}$$

Ако се уведу поларне координате

(6) $$y(x) = \rho(x) \sin\theta(x), \qquad z(x) = \rho(x)\cos\theta(x)$$

имамо

$$y' = \rho' \sin\theta + \theta'\rho\cos\theta, \qquad z' = \rho'\cos\theta - \theta'\rho\sin\theta .$$

Користећи (5) имамо

$$\cancel{\frac{1}{p(x)}\rho\cos\theta = \rho'\sin\theta + \rho\sin\theta}$$

$$\cancel{-Q(x)\rho\sin\theta = \rho'\cos\theta - \rho\sin\theta}$$

тј.

$$-\rho' =$$

$$\frac{1}{p(x)}\rho\cos\theta = \rho'\sin\theta + \theta'\rho\cos\theta$$

$$-Q(x)\rho\sin\theta = \rho'\cos\theta - \theta'\rho\sin\theta$$

Одавде је

$$\frac{1}{p(x)}\rho\cos\theta\sin\theta = \rho'\sin^2\theta + \theta'\rho\sin\theta\cos\theta$$

$$-Q(x)\rho\sin\theta\cos\theta = \rho'\cos^2\theta - \theta'\rho\sin\theta\cos\theta .$$

(7) $$\rho' = \rho\frac{\sin 2\theta}{2}\left(\frac{1}{p(x)} - Q(x)\right)$$

(8) $$\theta' = \frac{1}{p(x)}\cos^2\theta + Q(x)\sin^2\theta ,$$

где је $\rho = y^2 + (p(x)y')^2$, $\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{p(x)y'}$

На овај начин је проблем (1) сведен на једначину првог реда (8) јер када је познато θ једначина (7) је једначина која раздваја промјенљиве.

Гранични услови се своде на

$$h \sin\theta(a) + h' \frac{\cos\theta(a)}{p(a)} = 0,$$

$$k \sin\theta(b) + k' \frac{\cos\theta(b)}{p(b)} = 0,$$

Нека је $H = \left(h^2 + \left(\frac{h'}{p(a)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $K = \left(k^2 + \left(\frac{k'}{p(b)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

Постоје углови α и β такви да је

$$\cos\alpha = \frac{h}{H}, \quad \cos\beta = \frac{k}{K}$$

$$\sin\alpha = -\frac{h'}{p(a)h}, \quad \sin\beta = -\frac{k'}{K p(b)}$$

па је

$$\sin(\theta(a) - \alpha) = 0$$

$$\sin(\theta(b) - \beta) = 0$$

тј. $\theta(a) = \alpha$, $\theta(b) = \beta \pm k\pi$, $k = 0, 1, 2$

Гдје је $0 \le \alpha \le \pi$, $0 < \beta \le \pi$.

Ако се у једнакости (1) стави $P(x) = p(x)$, $Q(x) = \lambda r(x) - q(x)$ где је λ параметар и $p(x)$, $p'(x)$, $r(x)$, $q(x)$ непрекидне на коначном $[a, b]$ и $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ добијамо

$$(9) \qquad (p(x)y')' + (\lambda r(x) - q(x))y = 0$$

$$hy(a) + h'y'(a) = 0, \quad ky(b) + k'y'(b) = 0$$

који се назива регуларни Штурм-Лиувилов систем. Ако је посматрани интервал $[a, b]$ бесконачан или је коначан али и функција $p(x)$ или $r(x)$ анулира у a или у b или је од функција p, q, r прекидна тада се каже да је (9) сингуларан Штурм-Лиувилов систем.

Дефиниција. Вриједности λ за које систем (9) има нетривијалних рјешења називају се сопствене вриједности, а одговарајућа рјешења сопствене функције. Скуп њих сопствених вриједности назива се спектар система. Навешћемо неке особине сопствених вриједности и сопствених функција.

Уводећи смену

$$u = \int_a^x \frac{dt}{p(t)}$$

имамо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{1}{p(x)},$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\,p(x)\right)}{dx} = \frac{d^2y}{du^2}\cdot\frac{1}{p(x)},$$

па једначина (1) постаје

$$\frac{d^2y}{du^2} + p(x)q(x)y = 0.$$

На тај начин се и једначина (9) може свести на

(10) $\quad y'' + (\lambda r(x) - q(x))\,y = 0 \quad$ (са другим функцијама r и q).

Теорема. Нека су $r(x)$ и $q(x)$ непрекидне на $[a,b]$ и нека је

$$0 < r_m \le r(x) \le r_M, \quad q_m \le q(x) \le q_M \quad \text{за} \quad x \in [a,b].$$

Нека је ~~за~~

$$m^2 = \lambda r_m - q_M, \quad M^2 = \lambda r_M - q_m.$$

Тада произвољно решење једначине (10) има у $[a,b]$ најмање онолико нула ~~решења~~ колико и решење са истим почетним условом једначине

$$y'' + m^2 y = 0,$$

а највише онолико нула колико и решење са истим почетним условом једначине

$$y'' + M^2 y = 0.$$