KONVEKSNO PROGRAMIRANJE

Sadržaj

Uvod

Neka je f realna funkcija sa domenom $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$, i neka je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}(f)$ neprazan skup. Opšti (apstraktan) problem matematičkog programiranja sastoji se u određivanju vrijednosti

$$\pi = \inf_{x \in \mathcal{G}} f(x)$$

i skupa

$$\mathcal{G}^* = \{x \in \mathcal{G} : f(x) = \pi\}.$$

Problem označamo sa

$$(PA) : \quad \min\{\ f(x) : x \in \mathcal{G}\}.$$

Tačka $x^* \in \mathcal{G}$ je rješenje problema (PA) ako vrijedi

$$f(x) \geqslant f(x^*) \quad \forall x \in \mathcal{G}.$$

U suštini, x^* je tačka globalnog minimuma funkcije f na skupu $\mathcal{G}$. Često je lakše, a nekad i jedino moguće naći tačku minimuma date funkcije na nekom podskupu skupa $\mathcal{G}$. Zato kažemo da je x^* lokalno rješenje datog problema, ako je to tačka lokalnog minimuma funkcije f na skupu $\mathcal{G}$, tj. ako postoji okolina $\mathcal{O}$ tačke x^* takva da vrijedi

$$f(x) \geqslant f(x^*) \quad \forall x \in \mathcal{G} \cap \mathcal{O}.$$

$$\min\{c^\top x + c_0 : x \in \mathcal{G}\}, \quad \mathcal{G} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \mathrm{A}x \leqslant b,\ \mathrm{B}x = d\}.$$

Ovdje je:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(g) = \mathcal{D}(h) = \mathbb{R}^n,\ g(x) = \mathrm{A}x - b,\ h(x) = \mathrm{B}x - d,$$

matrice A i B su tipa $m \times n$, odnoso $p \times n$, a $b \in \mathbb{R}^m$ i $d \in \mathbb{R}^p$.

$\mathcal{J}_\infty$ $\mathcal{J}_1$ $\mathcal{J}_\leqslant$ $\mathcal{J}_=$ $\mathcal{J}_m \mathcal{J}_p$ $\mathcal{I}_m$

KONVEKSNI SKUPOVI

Definicija i primjeri

Definicija 1 *Skup $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksan ako za sve $x^1, x^2 \in \mathcal{C}$ i sve $\lambda \in [0,1]$ vrijedi*

$$(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in \mathcal{C}.$$

Dakle, duž $[x^1, x^2] = ...$ je podskup skupa $\mathcal{C}$ ako mu pripadaju njeni krajevi x^1 i x^2.

slika 1. C

Iz definicije slijedi da je skup $\mathcal{C}$ konveksan ako za svaki $\lambda \in [0,1]$ je

$$(1-\lambda)\mathcal{C} + \lambda\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}, \tag{1}$$

Od osnovnih skupovnih operacija konveksnost čuvaju sabiranje skupova i množenje realnim brojem. Isto tako vrijedi

Teorema 1 *Neka su $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ konveksni skupovi. Tada je $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ konveksan.*

Dokaz. Iz $x^1, x^2 \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, zbog konveksnosti datih skupova, slijedi $[x^1, x^2] \subseteq \mathcal{C}_1$ i $[x^1, x^2] \subseteq \mathcal{C}_2$, pa je $[x^1, x^2] \subseteq \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. $\square$

Napomenimo da je presjek i proizvoljno mnogo konveksnih skupova opet konveksan skup. Očigledno je da unija dva konveksna skupa ne mora biti konveksan skup.

Primjer 1 *Prazan skup $\varnothing$ (po definiciji), $\{a\}$, i $\mathbb{R}^n$ su konveksni skupovi.*

Primjer 2 *Jedinična kugla $\mathcal{B}$ i kugla sa centrom u x^0, poluprečnika r:*

$$\mathcal{B}(x^0, r) = x^0 + r\mathcal{B}$$

su konveksni skupovi.

Zaista, za $x^1, x^2 \in \mathcal{B}, \lambda \in [0,1]$ imamo

$$\|0 - (1-\lambda)x^1 - \lambda x^2\| \leqslant (1-\lambda)\|x^1\| + \lambda\|x^2\| \leqslant (1-\lambda)\cdot 1 + \lambda \cdot 1 = 1. \quad \square$$

Primjer 3 *Neka je $\{v^1, ..., v^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ linearno nezavisan skup. Tada je ravan*

$$\mathcal{R} = x^0 + \mathrm{lin}(v^1, ..., v^k)$$

konveksan skup. Specijalno su prava

$$\mathcal{P} = x^0 + \mathrm{lin}(v^1)$$

i hiperravan

$$\mathcal{H} = x^0 + \mathrm{lin}(v^1, ..., v^{n-1})$$

konveksni skupovi.

Inače svaka hiperravan je data sa

$$\mathcal{H}(a,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle a, x\rangle = \alpha\},$$

gdje je $a \in \mathbb{R}^n, a \neq \mathbf{0}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Za $a = \mathbf{0}$ dobijamo $\varnothing$ (ako je $\alpha \neq 0$) ili čitav prostor ($\alpha = 0$).

Primjer 4 *Zatvoreni poluprostor*

$$\mathcal{H}_+(a,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle a, x\rangle \geqslant \alpha\}, \ a \neq \mathbf{0},$$

kao i

$$\mathcal{H}_-(a,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle a, x\rangle \leqslant \alpha\}$$

su konveksni skupovi.

Ovo slijedi iz jednakosti $\langle a, (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2\rangle = (1-\lambda)\langle a, x^1\rangle + \lambda\langle a, x^2\rangle$. Dakle, i $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \cap \mathcal{H}_-$ je konveksan skup.

Primjer 5 *Skup $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ naziva se konus ako vrijedi*

$$x \in \mathcal{K}, \alpha \geqslant 0 \ \Rightarrow \ \alpha x \in \mathcal{K}.$$

Ova implikacija je ekvivalentna sa

$$\alpha\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}, \text{ za sve } \alpha \geqslant 0.$$

Ako je konus konveksan skup onda se naziva konveksan konus. Za njihovu karakterizaciju potrebna je i dovoljna prethodna formula i zatvorenost skupa $\mathcal{K}$ u odnosu na sabiranje, tj.

$$\mathcal{K} + \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}.$$

Iz ove dvije formule slijedi konveksnost:

$$(1-\lambda)\mathcal{K} + \lambda\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K} + \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K} \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Obratno, na osnovu $2\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, ako je konus konveksan imamo

$$\mathcal{K} + \mathcal{K} \subseteq \frac{1}{2}\,\mathcal{K} + \frac{1}{2}\,\mathcal{K} = \mathcal{K}.$$

Primjer 6 *Neka su v^1, v^2 dopustivi pravci skupa $\mathcal{C}$ u tački x^0. Postoje pozitivni brojevi t_1 i t_2 takvi da za $i = 1, 2$ vrijedi*

$$x^0 + tv^i \in \mathcal{C}, \quad \forall t \in]0, t_i[.$$

Sada, za sve pozitivne t manje od $2\min\{t_1, t_2\}$ imamo

$$x^0 + t(v^1 + v^2) = \frac{1}{2}\left(x^0 + tv^1\right) + \frac{1}{2}\left(x^0 + tv^2\right) \in \frac{1}{2}\,\mathcal{C} + \frac{1}{2}\,\mathcal{C} = \mathcal{C},$$

tako da je i $v^1 + v^2$ dopustiv pravac. Jasno, za svaki dopustivi pravac v i sve $\alpha > 0$ pravac αv je dopustiv. Uključujući ovdje i nula vektor dobijamo konveksan konus $\mathcal{V}(x^0, \mathcal{C})$.

Primjer 7 *Skup* $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ *određuje konus*

$$\text{cone } \mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha y, y \in \mathcal{S}, \alpha \geqslant 0\}.$$

To je konus generisan skupom $\mathcal{S}$. *Nije teško vidjeti da je* cone $\mathcal{C}$ *konveksan konus, ako je* $\mathcal{C}$ *konveksan skup. Specijalno,*

$$\text{cone } \{a\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha a, \alpha \geqslant 0\}.$$

je poluprava, a

$$\mathcal{V}(x^0, \mathcal{C}) = \text{cone } (\mathcal{C} - \{x^0\})$$

Ukoliko neki skup nije konveksan, možemo mu dodijeliti najmanji konveksan skup koji ga sadrži (poredak je dat relacijom $\subseteq$.) u tom cilju, za proizvoljan neprazan skup $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ posmatraćemo sve njegove konveksne nadskupove. Njihov presjek je neprazan (podskup mu je $\mathcal{S}$) i konveksan. Nazivamo ga konveksni omotač skupa $\mathcal{S}$ i pišemo co $\mathcal{S}$. Dakle,

$$\text{co } S = \bigcap_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}} C.$$

Primjer 8 *Skup*

$$\text{co } \{x^0, x^1, ..., x^k\}$$

naziva se k-dimenzionalni simpleks u $\mathbb{R}^n$, *ako je* $\{x^1 - x^0, ..., x^k - x^0\}$ *linearno nezavisan. Specijalno,* co $\{\mathbf{0}, e^1, ..., e^n\}$ *je standardan n-simpleks u* $\mathbb{R}^n$, *dok je*

$$\sigma^n = \text{co } \{e^1, ..., e^{n+1}\}$$

n- dimenzionalni jedinični simpleks u $\mathbb{R}^{n+1}$

slika

Na osnovu definicije, za prozvoljne skupove $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ i konveksan skup $\mathcal{C}$ vrijedi

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \text{co } \mathcal{S} \subseteq \text{co } \mathcal{T}, \quad \mathcal{C} = \text{co } \mathcal{C}, \quad \text{co } (\text{co } \mathcal{S}) = \text{co } \mathcal{S} \ .$$

Kao što znamo, $\lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_k x^k$ je linearna kombinacija vektora $x^1, ..., x^k \in \mathcal{S}$ ako su $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, a afina kombinacija ako je još $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$. Dodajući uslov nenegativnosti $\lambda_1 \geqslant 0, ..., \lambda_k \geqslant 0$ dobijamo konveksnu kombinaciju datih vektora. Za svaki prirodan broj k, proizvoljnom nepraznom skupu $\mathcal{S}$ dodjeljujemo skup svih konveksnih kombinacija svakih k njegovih elemenata :

$$\text{co}_k \mathcal{S} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i : x^i \in \mathcal{S}, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0 \right\}.$$

Pomoću njih opisaćemo konveksni omotač skupa $\mathcal{S}$. Prije svega, vrijedi:

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \text{co}_k \ \mathcal{S} \subseteq \text{co}_k \ \mathcal{T}, \tag{2}$$

$$(1-\lambda)\text{co}_p\ \mathcal{S} + \lambda\text{co}_q\ \mathcal{S} \subseteq \text{co}_{p+q}\ \mathcal{S}, \tag{3}$$

za sve $\lambda \in [0,1]$, a za svaki konveksan skup $\mathcal{C}$ je

$$\text{co}_k\ \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}. \tag{4}$$

Ova inkluzija se dokazuje indukcijom.

Teorema 2 *Ako je $\mathcal{S}$ neprazan podskup od $\mathbb{R}^n$, onda je*

$$\text{co}\ \mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \text{co}_k\ \mathcal{S}.$$

Dokaz. Sa jedne strane je $\mathcal{S} = \text{co}_1\ \mathcal{S} \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \text{co}_k\ \mathcal{S}$, odakle je co $\mathcal{S} \subseteq$ co $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \text{co}_k\ \mathcal{S}$. Pošto iz (3) slijedi da je posmatrana unija konveksan skup imamo

$$\text{co}\ \mathcal{S} \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \text{co}_k\ \mathcal{S}.$$

Dalje, zbog $\mathcal{S} \subseteq \text{co}\ \mathcal{S}$ vrijedi $\text{co}_k\ \mathcal{S} \subseteq \text{co}_k\ (\text{co}\ \mathcal{S})$, a na osnovu (4) je $\text{co}_k\ (\text{co}\ \mathcal{S}) \subseteq \text{co}\ \mathcal{S}$, tako da imamo $\text{co}_k\ \mathcal{S} \subseteq \text{co}\ \mathcal{S}$. Kako posljednja inkluzija vrijedi za sve prirodne brojeve, to je

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \text{co}_k\ \mathcal{S} \subseteq \text{co}\ \mathcal{S}. \ \square$$

Ovaj rezultat se može precizirati.

Teorema 3 (Karateodori,1911) *Ako je $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan skup vrijedi*

$$\text{co}\ \mathcal{S} = \bigcup_{k=1}^{n+1} \text{co}_k\ \mathcal{S}.$$

Dokaz. Neka je $x \in \text{co}\ \mathcal{S}$. Tada je $x = \lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_k x^k$, za neke $x^1, ..., x^k \in \mathcal{S}, \lambda_1 \geqslant 0, ..., \lambda_k \geqslant 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$. Ako je $k > n+1$, onda je skup vektora $\left\{ \begin{pmatrix} x^i \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} : \ i = 1, ..., k \right\}$ linearno zavisan. Postoje realni brojevi $\alpha_1, ..., \alpha_k$, koji nisu svi jednaki 0, takvi da je

$$\alpha_1 x^1 + \cdot + \alpha_k x^k = \mathbf{0}, \quad \alpha_1 + \cdot + \alpha_k = 0.$$

Bar jedan od njih je pozitivan, pa neka je $\dfrac{\lambda_j}{\alpha_j} = \min\limits_{\alpha_i > 0} \dfrac{\lambda_i}{\alpha_i}$. Imamo

$$x = x - \frac{\lambda_j}{\alpha_j} \cdot \mathbf{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i - \frac{\lambda_j}{\alpha_j} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i = \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_j}{\alpha_j} \alpha_i \right) x^i.$$

Pošto je $\lambda_i - \dfrac{\lambda_j}{\alpha_j}\alpha_i \geqslant 0$ (za i takvo da je $\alpha_i \leqslant 0$ to je očigledno, a za ostale zbog izbora indeksa j) i $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_j}{\alpha_j} \alpha_i \right) = 1 - \frac{\lambda_j}{\alpha_j} \cdot \mathbf{0} = 1$, to je x linearna

kombinacija tačaka skupa $\{x^1, ..., x^{j-1}, x^{j+1}, ..., x^k\}$.
Redukcija se nastavlja sve dok skup preostalih vektora $\begin{pmatrix} x^i \\ 1 \end{pmatrix}$ ne postane linearno nezavisan, tj. dok ih ne ostane najviše $n+1$. Tada je $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{n+1} \mathrm{co}_k\ \mathcal{S}$.
Dakle, $\mathrm{co}\ \mathcal{S} \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n+1} \mathrm{co}_k\ \mathcal{S}$. Obratna inkluzija izlazi iz prethodne teoreme. $\square$

Primjer 9 *Na osnovu Karateodorijeve teoreme dobijamo*

$$\sigma^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1,\ x_i \geqslant 0\}$$

Teoreme razdvajanja

Definicija 2 *Konveksni skupovi $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ su razdvojeni ako postoje tačka $a \in \mathbb{R}^n, a \neq \mathbf{0}$ i realan broj α takvi da za sve $x \in \mathcal{C}_1$ i sve $y \in \mathcal{C}_2$, vrijedi*

$$\langle a, y\rangle \leqslant \alpha \leqslant \langle a, x\rangle.$$

Iz definicije vidimo da vrijedi

$$\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{H}_+(a, \alpha), \quad \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{H}_-(a, \alpha),$$

pa možemo reći da hiperravan $\mathcal{H}(a, \alpha)$ razdvaja (separira) teskupove . Ako su $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ u različitim otvorenim poluprostorima, oni su strogo razdvojeni. Tada za sve $x \in \mathcal{C}_1$ i sve $y \in \mathcal{C}_2$ vrijedi

$$\langle a, y\rangle < \alpha < \langle a, x\rangle.$$

Dokažimo prvo jednu pomoćnu, ali važnu teoremu.

Teorema 4 *Neka je $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup i $\mathbf{0} \notin \mathcal{C}$. Tada su skupovi*

a) *$\mathcal{C}$ i $\{\mathbf{0}\}$ strogo razdvojeni, ako je $\mathcal{C}$ zatvoren skup.*

b) *$\mathcal{C}$ i $\{\mathbf{0}\}$ razdvojeni.*

Dokaz. a) Neka je $r > 0$ takav broj da je $\mathcal{C} \cap \mathcal{B}(\mathbf{0}, r)$ neprazan skup. On je kompaktan skup (kao presjek zatvorenog skupa i zatvorene kugle), pa neprekidna funkcija $x \mapsto \|x\|$ dostiže na njemu minimum, u nekoj tački c. Dakle, za sve tačke x posmatranog presjeka vrijedi $\|x\| \geqslant \|c\|$. Za ostale tačke skupa $\mathcal{C}$ je $\|x\| \geqslant r \geqslant \|c\|$. Zaključno, za sve $x \in \mathcal{C}$ vrijedi $\|x\| \geqslant \|c\|$, odnosno $\|x\|^2 \geqslant \|c\|^2$. Kako je $\mathcal{C}$ konveksan i $c \in \mathcal{C}$, to za svaki $x \in \mathcal{C}$ i sve $\lambda \in]0, 1[$ imamo $c + \lambda(x - c) \in \mathcal{C}$, pa je

$$\|c + \lambda(x - c)\|^2 \geqslant \|c\|^2, \text{odnosno, } 2\langle x - c, c\rangle + \lambda\|x - c\|^2 \geqslant 0.$$

Pri $\lambda \to 0+$, dobijamo da je $\langle c, x\rangle \geqslant \|c\|^2$. Uzimajući da je $a = c$, i $\alpha = \dfrac{\|c\|^2}{2}$ slijedi $a \neq \mathbf{0}$ (jer $\mathbf{0} \notin \mathcal{C} \Longrightarrow \|c\| \neq 0$), i $\alpha > 0$, tako da dobijamo

$$\langle a, x\rangle > \alpha > \langle a, \mathbf{0}\rangle, \text{ za sve } x \in \mathcal{C}.$$

b) Ako $\mathbf{0}$ nije u cl $\mathcal{C}$, koji je takođe konveksan skup, imamo situaciju iz a). Zato, neka je $\mathbf{0} \in \text{cl}\,\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}$. Postoji niz $\{c^k\}, c^k \in \mathbb{R}^n \setminus \text{cl}\,\mathcal{C}$, takav da $c^k \to \mathbf{0}$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ skup

$$-c^k + \text{cl}\,\mathcal{C}$$

je konveksan i zatvoren. Tom skupu ne pripada $\mathbf{0}$, pa prema a), postoji niz vektora (a^k) takav da za sve $x \in \text{cl}\,\mathcal{C}$ vrijedi

$$\left\langle a^k, -c^k + x\right\rangle > \left\langle a^k, \mathbf{0}\right\rangle = 0.$$

Pošto je $a^k \neq \mathbf{0}$ imamo

$$\left\langle \frac{a^k}{\|a^k\|}, x - c^k \right\rangle \geqslant 0, \quad \frac{a^k}{\|a^k\|} \in \mathcal{S}(\mathbf{0}, 1).$$

Niz $\left\{ \dfrac{a^k}{\|a^k\|} \right\}$ ima podniz koji konvergira ka $a \in \mathcal{S}(\mathbf{0}, 1)$. Pri tome je $\|a\| = 1$, tako da u graničnom procesu dobijamo, za sve $x \in \mathcal{C}$

$$\langle a, x\rangle \geqslant 0 = \langle a, \mathbf{0}\rangle. \quad \square$$

Sada možemo dokazati osnovne teoreme razdvajanja.

Teorema 5 *Neka su $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazni, disjunktni, konveksni i zatvoreni. Ako je jedan od njih ograničen, onda postoji hiperravan koja ih strogo razdvaja.*

Dokaz. Razlika $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$ datih skupova, po pretpostavkama, je konveksan i zatvoren skup. Uz ovo, uslov $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \varnothing$ znači da je $\mathbf{0} \notin \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$. Prema prethodnoj teoremi postoji $a \in \mathbb{R}^n, a \neq \mathbf{0}$ i $\beta > 0$ tako da za sve $x \in \mathcal{C}_1$ i sve $y \in \mathcal{C}_2$ vrijedi

$$\langle a, x - y\rangle > \beta > 0,$$

odakle je

$$\langle a, x\rangle > \langle a, y\rangle + \beta > \langle a, y\rangle.$$

Skup $\{\langle a, x\rangle : x \in \mathcal{C}_1\}$ je ograničen odozdo sa $\langle a, y\rangle + \beta$, za proizvoljan fiksiran $y \in \mathcal{C}_2$. Sada je

$$\inf_{x \in \mathcal{C}_1} \langle a, x\rangle - \beta$$

gornja međa skupa $\{\langle a, y\rangle : y \in \mathcal{C}_2\}$, pa imamo

$$\inf_{x \in \mathcal{C}_1} \langle a, x\rangle \geqslant \sup_{y \in \mathcal{C}_2} \langle a, y\rangle + \beta > \sup_{y \in \mathcal{C}_2} \langle a, y\rangle.$$

Uzimajući α između uočenog supremuma i infimuma slijede nejednakosti iz definicije 2. $\square$

Koristeći drugi dio teoreme 5, a ponavljajući prethodni postupak, uz izbor

$$\alpha \in [\sup_{\mathcal{C}_2}\langle a, y\rangle,\ \inf_{\mathcal{C}_1}\langle a, x\rangle]$$

dobija se

Teorema 6 *Neprazni, disjunktni i konveksni skupovi $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ su razdvojeni.*

Posljedica 1 *Ako je još skup $\mathcal{C}_1$ otvoren, uz uslove teoreme 6, onda postoji hiperravan $\mathcal{H}(a, \alpha)$, takva da vrijedi*

$$\mathcal{C}_1 \subseteq \text{int } \mathcal{H}_-(a, \alpha), \ i \quad \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{H}_+(a, \alpha).$$

Dokaz. Iz prethodne teoreme slijedi da je $\langle a,\ x\rangle \leqslant \alpha$ za sve $x \in \mathcal{C}_1$. Ako bi bilo $\langle a, x^0\rangle = \alpha$ za neki $x^0 \in \mathcal{C}_1$, onda (imajući na umu da je i $x^0 + \varepsilon \dfrac{a}{\|a\|^2} \in \mathcal{C}_1$, pri malom $\varepsilon > 0$) dobijamo

$$\left\langle a, x^0 + \varepsilon \frac{a}{\|a\|^2} \right\rangle = \alpha + \varepsilon \leqslant \alpha.$$

Ovo nije moguće, tako da preostaje

$$\langle a,\ x\rangle < \alpha \leqslant \langle a,\ y\rangle,$$

za sve $x \in \mathcal{C}_1$, i sve $y \in \mathcal{C}_2$. $\square$

EKSTREMALNE TAČKE

Definicija 3 *Tačka $x \in \mathcal{C}$ je vrh (ekstremalna tačka) konveksnog skupa $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ ako ne postoje različite tačke $x^1, x^2 \in \mathcal{C}$ takve da vrijedi*

$$x = \frac{x^1 + x^2}{2}.$$

Lako se vidi da je x vrh konveksnog skupa $\mathcal{C}$ ako i samo ako iz $x^1, x^2 \in \mathcal{C}$, i $\lambda \in]0, 1[, x = (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2$ slijedi $x^1 = x^2$. Drugim riječima vrh skupa nije unutrašnja tačka intervala koji leži u skupu $\mathcal{C}$.

Primjer 10 *Neka je* A *$m \times n$ matrica čiji je rang $m < n$ i $b \in \mathbb{R}^m$. Skup*

$$\mathcal{S}^+(\mathrm{A}, \mathrm{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{A}x = b,\ x \geqslant \mathbf{0}\}$$

ima vrh, ako je neprazan.
Skup kolona $\{a_{*1}, ..., a_{*n}\}$ je linearno zavisan, pa postoje α_i $\sum_{j=1}^n \alpha_j a_{*j} = \mathbf{0}$ Stavimo $\beta = \ min_{\alpha_i > 0} \frac{y_i}{\alpha_i}$ Neka je $y \in \mathcal{S}^+$ i $z = y - \beta u$ Vrijedi $\mathrm{A}z = b, z \geqslant \mathbf{0}, z_n = 0$

Neograničeni, zatvoreni konveksni skupovi, poput hiperravni, ne moraju imati vrhove. Situacija je drukčija ako je skup ograničen.

Teorema 7 *Svaki neprazan, konveksan, kompaktan skup $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ ima vrh.*

Dokaz. Prema Vajerštrasovoj teoremi, u $\mathcal{C}$ postoji tačka maksimuma neprekidne funkcije $x \mapsto \|x\|$. Pokazaćemo da je ona jedan vrh. Neka je x^0 ta tačka i još

$$x^0 = \frac{x^1 + x^2}{2}, \quad \text{za neke} \quad x^1, x^2 \in \mathcal{C}.$$

Pomoću jednakosti paralelograma (...) dobijamo

$$\|x^1 - x^2\|^2 + \|2x^0\|^2 = 2(\|x^1\|^2 + \|x^2\|^2) \leqslant 4\|x^0\|^2,$$

odakle je $\|x^1 - x^2\| \leqslant 0$, i $x^1 = x^2$, pa je x^0 vrh skupa $\mathcal{C}$. $\square$

Pokažimo da linearna funkcija $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $l(x) = \langle c, x\rangle$ dostiže minimum i maksimum na kompaktnom, konveksnom skupu $\mathcal{C}$ u njegovom vrhu.
Prije svega, postoji $x^* \in \mathcal{C}$ takva da je

$$\min_{x \in \mathcal{C}} l(x) = l(x^*).$$

Jasno, skup $\mathcal{C}^* = \{x \in \mathcal{C} : l(x) = l(x^*\}$ je konveksan i kompaktan, pa ima vrh x^0. Pokažimo da je on vrh i skupa $\mathcal{C}$. Ako nije, postoje različite tačke x^1, x^2 iz $\mathcal{C}$, od kojih bar jedna nije u $\mathcal{C}^*$, takve da je $2x^0 = x^1 + x^2$. Pošto $\{x^1, x^2\} \nsubseteq \mathcal{C}^*$ mora biti $l(x^1) + l(x^2) > 2l(x^0)$, a zbog linearnosti funkcije l to je nemoguće. $\square$

Ova primjedba ima poseban značaj u linearnom programiranju. Mi ćemo je iskoristiti za dalju analizu konveksnog omotača. Naime, u izgradnji konveksnog omotača kompaktnog, konveksnog skupa ne sudjeluju, u suštini, sve njegove tačke, nego samo vrhovi. U narednoj teoremi ext $\mathcal{C}$ označava skup svih vrhova skupa $\mathcal{C}$.

Teorema 8 (Minkovski, 1911) *Neka je $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ neprazan, konveksan, kompaktan skup. Tada*

$$\mathcal{C} = \text{co } (\text{ext } \mathcal{C}).$$

Teoreme alternative

Pomoću teorema razdvajanja dokazaćemo neke od važnih teorema alternative. Alternativni sistemi linearnih (ne)jednačina su oni kod kojih samo jedan ima rješenje. Na primjer, alternativni sistemi su :

$$Ax = b, \ x \geqslant \mathbf{0} \tag{5}$$

i

$$A^\top y \geqslant \mathbf{0}, \ b^\top y < 0. \tag{6}$$

Ovdje je A $m \times n$ matrica, $b \in \mathbb{R}^m$ dok vektori $\mathbf{0}, x$ i y u skladu s tim. nepoznati vektori su u skladu s tim. Kao i ranije skup rješenja sistema (5) označimo sa $\mathcal{S}_+(\mathrm{A}, b)$, tvrđenje u kojem tačno jedan od navedenih sistema ima rješenje možemo dati na sljedeći način.

Teorema 9 (Farkaš, 1902)

$$\mathcal{S}_+(\mathrm{A}, b) \neq \varnothing$$

ako i samo ako

$$y^\top A \geqslant \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad y^\top b \geqslant 0. \tag{7}$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{S}_+(\mathrm{A}, b) \neq \varnothing$. Tada iz $y^\top \mathrm{A} \geqslant \mathbf{0}$, množenjem sa $x^0 \in \mathcal{S}_+(\mathrm{A}, b)$ dobijamo $y^\top \mathrm{A} x^0 \geqslant \mathbf{0}$, odnosno $y^\top b \geqslant 0$.
Za dokaz implikacije:

$$(7) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}_+(\mathrm{A}, b) \neq \varnothing$$

poslužimo se kontrapozicijom. Dakle, neka je $\mathcal{S}_+(\mathrm{A}, b) = \varnothing$. To znači da su disjunktni skupovi

$$\mathcal{C}_1 = \{\mathrm{A}x : x \in \mathbb{R}^n_+\}, \qquad \mathcal{C}_2 = \{b\}$$

Oni su konveksni, a $\mathcal{C}_1$ i zatvoren, pa ih strogo razdvaja neka hiperravan $\mathcal{H}(y, \alpha)$. Dakle, za sve $x \geqslant \mathbf{0}$ vrijedi

$$y^\top b < \alpha < y^\top \mathrm{A} x. \tag{8}$$

Specijalno, za $x = \mathbf{0}$ dobijamo $y^\top b < 0$, štaviše $\alpha < 0$. Pokažimo da je $y^\top \mathrm{A} \geqslant \mathbf{0}$. Uzmimo, suprotno, da je $(y^\top \mathrm{A})_i = \beta < 0$, za neki $i \in \{1, ..., m\}$. Vektor $x = (1 + \frac{\alpha}{\beta}) e^i$ nema negativne koordinate i $y^\top (\mathrm{A}x) = (y^\top \mathrm{A}) x = \beta(1 + \frac{\alpha}{\beta}) < \alpha$. Posljednje protivrječi (8), pa je $y^\top \mathrm{A} \geqslant \mathbf{0}$ i $y^\top b < 0$, a to je negacija formule (7).
□

Pomoću Farkaševe dokazaćemo još neke teoreme alternative.

Teorema 10 (Aleksandrov, Fan) *Sistemi*

$$\mathrm{A}x \geqslant b, \tag{9}$$

$$\mathrm{A}^\top y = \mathbf{0}, \quad b^\top y > 0, \quad y \geqslant \mathbf{0} \tag{10}$$

su alternativni.

Dokaz. Sistem (10) je ekvivalentan sa sistemom

$$\mathrm{A}^\top y = \mathbf{0}, \quad b^\top y = 1, \quad y \geqslant \mathbf{0}, \tag{11}$$

odnosno sa

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}^\top \\ b^\top \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}, y \geqslant \mathbf{0}.$$

Njemu je, prema Farkašovoj teoremi, alternativan sistem

$$(\mathrm{A}, b) \begin{pmatrix} z \\ \zeta \end{pmatrix} \leqslant \mathbf{0}, \ (z^\top, \zeta) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} > 0,$$

tj.

$$\mathrm{A}z + \zeta b \leqslant \mathbf{0},\ \zeta > 0,$$

što je, uz $x = -\frac{z}{\zeta}$, ekvivalentno sa

$$\mathrm{A}x \geqslant b. \quad \square$$

Teorema 11 (Mockin 1936) *Sistem*

$$\mathbf{A}x < \mathbf{0},\ \mathbf{B}x \leqslant \mathbf{0} \tag{12}$$

nema rješenje ako i samo ako sistem

$$\mathbf{A}^\top u + \mathbf{B}^\top v = \mathbf{0},\ u \geqslant \mathbf{0},\ v \geqslant \mathbf{0}.\ u \neq \mathbf{0} \tag{13}$$

ima rješenje.

Dokaz. Neka prvi sistem nema rješenje po x. Ekvivalentno, sistem

$$\begin{array}{c} \mathrm{A}x + \xi\mathbf{e} \leqslant \mathbf{0} \\ \mathbf{B}x \leqslant \mathbf{0} \\ \xi > 0\ . \end{array}$$

nema rješenje po $\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$. Ovo je ekvivalentno sa implikacijom

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{e} \\ \mathrm{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \leqslant \mathbf{0} \Longrightarrow (\mathbf{0}, 1) \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

odnosno

$$(x, \xi) \begin{pmatrix} -\mathrm{A}^\top & -\mathbf{B}^\top \\ -\mathbf{e}^\top & \mathbf{0}^\top \end{pmatrix} \geqslant \mathbf{0} \Longrightarrow (x, \xi) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -1 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Sad prema Farkašovoj teoremi zaključujemo da je nepostojanje rješenja sistema (9) ekvivalentno sa postojanjem vektora $(u, v) \geqslant \mathbf{0}$ takvog da je

$$-\mathrm{A}^\top u - \mathbf{B}^\top v = \mathbf{0}, \quad -\mathbf{e}^\top u + \mathbf{0}^\top v = -1,$$

što je (10). $\square$

Uzimajući u Mockinovoj teoremi da je $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ direktno slijedi sljedeći rezultat.

Teorema 12 (Gordan 1873, Štimke, 1915) *Samo jedan od sistema*

$$\mathrm{A}x < \mathbf{0}, \tag{14}$$

$$\mathrm{A}^\top y = \mathbf{0}, \quad y \geqslant \mathbf{0}, \quad y \neq \mathbf{0} \tag{15}$$

ima rješenje.

Od ostalih navedimo da su alternativni sljedeći sistemi:
a) [Gejl]
$$\mathrm{A}x \geqslant b,\ x \geqslant \mathbf{0} \quad \text{i} \quad \mathrm{A}^\top y \leqslant \mathbf{0},\ b^\top y > 0,\ y \geqslant \mathbf{0}.$$
b) [Fredholm]
$$\mathrm{A}x = b \quad \text{i} \quad \mathrm{A}^\top y = \mathbf{0},\ b^\top y > 0.$$

KONVEKSNE FUNKCIJE

1. Definicija, primjeri, osnovna svojstva
Neka je f realna funkcija definisana na skupu $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$, i $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}(f)$ neprazan, konveksan skup.

Definicija 4 Funkcija f je konveksna na $\mathcal{C}$ ako za sve $x^1, x^2 \in \mathcal{C}$ i svaki $\lambda \in [0,1]$ vrijedi

$$f\big((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2\big) \leqslant (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2). \tag{16}$$

Ako je u nejednakosti (16) znak $<$ umjesto $\leqslant$, za sve $x^1 \neq x^2$ i svaki $\lambda \in]0,1[$, kažemo da je f strogo konveksna funkcija. Funkcija f je konkavna ako je -f konveksna, tj. ako umjesto (16) vrijedi

$$f\big((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2\big) \geqslant (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2).$$

Primjer 11 *Afina funkcija $a(x) = \langle a, x\rangle + \alpha$ je konveksna na $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$. Ona je i konkavna na tom skupu. Afine funkcije su jedine koje su konveksne i konkavne.*

Primjer 12 *$f(x) = \|x\|$ je konveksna na $\mathbb{R}^n$, što direktno slijedi iz svojstava norme. Međutim, ako je* int $\mathcal{C} \neq \varnothing$, $x^1 \in \text{int}\,\mathcal{C}$, $x^2 = (1+t)x^1$ *(t malo, dovoljno da bude $x^2 \in \mathcal{C}$) i $\lambda = \frac{1}{2}$, onda* (16) *postaje jednakost. Dakle, norma nije strogo konveksna na $\mathcal{C}$ sa nepraznom unutrašnošću.*

Primjer 13 *Pošto vrijedi*

$$\|(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2\|^2 = (1-\lambda)\|x^1\|^2 + \lambda\|x^2\|^2 - (1-\lambda)\lambda\|x^1 - x^2\|^2$$

vidimo da je $f(x) = \|x\|^2$ strogo konveksna na $\mathbb{R}^n$.

Primjer 14 *Kvadratna forma $q(x) = \langle \mathrm{C}x, x\rangle + \langle c, x\rangle$ je konveksna na svakom $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$, ako i samo ako je simetrična matrica* C *pozitivno semidefinitna. Ovo slijedi iz*

$$(1-\lambda)q(x^1) + \lambda q(x^2) - q((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) = \lambda(1-\lambda)\langle \mathrm{C}(x^1 - x^2), x^1 - x^2\rangle.$$

Kvadratna forma je strogo konveksna ako i samo ako je C *pozitivno definitna.*

Sljedeće teoreme se jednostavno dokazuju.

Teorema 13 *Neka su $f_1, ..., f_m$ konveksne na $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$, i $\alpha_1, ..., \alpha_m$ nenegativni realni brojevi. Tada je $f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_m f_m$ konveksna funkcija na $\mathcal{C}$.*

Teorema 14 *Funkcija f je konveksna na $\mathcal{C}$ ako i samo ako za svaki $m \in \mathbb{N}$, sve $x^1, ..., x^m \in \mathcal{C}, \lambda_1 \geqslant 0, ..., \lambda_m \geqslant 0$, takve da je $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$ vrijedi*

$$f(\lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_m x^m) \leqslant \lambda_1 f(x^1) + \cdots + \lambda_m f(x^m).$$

Ovo je Jensenova nejednakost za konveksne funkcije, a može se dokazati indukcijom, slično dokazu formule (4). Važni skupovi koji su pridruženi svakoj funkciji $f : \mathcal{D}(f) \longrightarrow \mathbb{R}, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ su nadgraf (epigraf), podgraf (hipograf) i nivoski (Lebegov) skup :

$$\text{epi } f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(f) \times \mathbb{R} \ : \ \alpha \geqslant f(x) \right\}$$

$$\text{hypo } f = -\text{epi } (-f),$$

$$\text{lev } (f, \alpha) = \{ x \in \mathcal{D}(f) \ : \ f(x) \leqslant \alpha \} .$$

Teorema 15 *Neka je $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup. Funkcija f je konveksna na $\mathcal{C}$ ako i samo ako je* epi f *konveksan skup.*

Jasno, f je konkavna ako i samo ako je hypo f konveksan skup. Svaki nivoski skup (uključujući $\varnothing$) konveksne funkcije je konveksan. Na osnovu nejednakosti (16) dokaz je trivijalan.

Primjer 15 *Neka su f, g konveksne funkcije na $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je konveksna funkcije $f \vee g$ definisana sa:*

$$f \vee g(x) = \max \, \{f(x), g(x)\}.$$

Ovdje je dovoljno pokazati da je epi $f \vee g$ = epi $f \cap$ epi g, pa uz prethodnu teoremu iskoristiti i činjenicu da je presjek konveksnih skupova konveksan. Ovo vrijedi i za proizvoljno konveksnih funkcija, tj.

$$\sup f_i$$

je konveksna.

Primjer 16 *Neka je a afina funkcija, i $\mathcal{A}_f$ skup svih afinih minoranti konveksne funkcije f: $\mathcal{A}_f = \{a : a(x) \leqslant f(x) \ \forall x \in \mathcal{C}\}$. Stavimo*

$$\overline{f}(x) = \sup_{a \in \mathcal{A}_f} a(x),$$

i pokažimo da je tako definisana funkcija $\overline{f} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$.
Uzmimo prvo da je int $\mathcal{C} \neq \varnothing$ *i da mu pripada x^0. Skup $\mathcal{C}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} : x \in \text{int} C, \ \ x_{n+1} > f(x) \right\}$ je konveksan, otvoren (f je neprekidna na* int $\mathcal{C}$*) i ne pripada mu $\begin{pmatrix} x^0 \\ f(x^0) \end{pmatrix}$.*
Prema teoremi separacije (Posljedica1) postoje $\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ i β, takvi da za sve $x \in$ int C vrijedi

$$\left\langle a, x^0 \right\rangle + \alpha f(x^0) \leqslant \beta < \langle a, x \rangle + \alpha x_{n+1}.$$

Za $x = x^0$ *i* $x_{n+1} = f(x^0) + 1$ *dobijamo* $\alpha > 0$, *a za* $x_{n+1} = f(x) + \varepsilon$ $(\varepsilon \to 0+)$

$$a(x) = \left\langle -\frac{a}{\alpha}, x \right\rangle + \frac{\beta}{\alpha} \leqslant f(x) \quad \forall x \in \text{int } C.$$

Jasno,

$$a(x^0) = f(x^0).$$

Neka je, sada $x \in$ *bd* $\mathcal{C}$. *Pošto je* $[x^0, x[\subseteq \text{int } \mathcal{C}$, *prema prethodnom imamo* $a(\frac{x^0+x}{2}) \leqslant f(\frac{x^0+x}{2}) \leqslant \frac{f(x^0)+f(x)}{2}$, $2a(\frac{x^0+x}{2}) - a(x^0) \leqslant f(x)$, $a(x) \leqslant f(x)$.
Dakle, za sve $x \in \mathcal{C}$ *vrijedi* $a(x) \leqslant f(x)$, *odakle slijedi da je* $\overline{f}$ *definisana na* $\mathcal{C}$. *Prema prethodnom primjeru ona je konveksna funkcija. Uvijek vrijedi* $\overline{f} \leqslant f$, *a kažemo da je* f *zatvorena ako je* $f = \overline{f}$.

Navedimo da se u nekonveksnom slučaju može desiti da je $\mathcal{A}_f = \varnothing$. *Tada stavljamo* $\overline{f} \equiv -\infty$. *Za ovakvu situaciju kao primjer možemo razmotriti funkciju* $x \mapsto x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Jedan nelinearan sistem nejednačina

Da bismo jednostavnije formulisali tvrđenje o sistemima nejednačina sa konveksnim funkcijama, koje je tipa teorema alternative definisaćemo pojam konveksnih vektorskih funkcija. Za funkciju $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g = (g_1, ..., g_m)$ kažemo da je konveksna vektorska funkcija, ako su sve komponentne funkcije g_i konveksne. U tom slučaju prirodno, nivoski skup $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leqslant a\}$, $a = (a_1, ..., a_m)$ je presjek nivoskih skupova $\text{lev}(g_i, a_i)$.
Slijedeću, važnu teoremu dokazali su Fan, Gliksberg i Hofman (1957).

Teorema 16 *Neka je* $g = (g_1, ..., g_m)$ *konveksnea vektorska funkcija na konveksnom skupu* $\mathcal{C} \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{D}(g_i)$. *Tada vrijedi*

$$\{x \in \mathcal{C} : g(x) < \mathbf{0}\} = \varnothing \Longleftrightarrow (\exists u \gneqq \mathbf{0})(\forall x \in \mathcal{C}) \ \langle u, \ g(x) \rangle \ \geqslant 0.$$

Dokaz. Skup $\mathcal{C}_1 = \{y \in \mathbb{R}^m : g(x) < y, \text{ za neki } x \in \mathcal{C}\}$ je konveksan i neprazan. Ako je skup $\{x \in C : g(x) < \mathbf{0}\}$ prazan, onda $\mathbf{0}$ ne pripada skupu $\mathcal{C}_1$. Prema Teoremi separacije 5. postoji $u \in \mathbb{R}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$, takav da vrijedi

$$\langle u, \ y \rangle \geqslant 0.$$

Kako za svaki fiksiran $x \in \mathcal{C}$, i svaki realan broj $\varepsilon > 0$ imamo $g(x) + \varepsilon\mathbf{e} \in \mathcal{C}_1$, to je $\langle u, g(x) + \varepsilon e \rangle \geqslant 0$. Sada, pri $\varepsilon \to 0$, dobijamo nejednakost $\langle u, g(x) \rangle \geqslant 0$, za svaki $x \in \mathcal{C}$. Pokažimo još da je $u \geqslant \mathbf{0}$. Ako bismo imali da je neki $u_j < 0$, uzimajući

$$y^k = g(x) + \varepsilon e + k e^j, \quad k \in \mathbb{N}$$

dobili bismo

$$\lim_k \langle u, \ y^k \ \rangle = -\infty.$$

Obratno tvrdjenje imamo kontrapozicijom na osnovu

$$g(x^0) < \mathbf{0},\ u \gneq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \langle u,\ g(x^0)\rangle < 0. \ \square$$

Neprekidnost i zatvorenost

Konveksne funkcije imaju važno svojstvo da su neprekidne na otvorenom skupu. Preciznije, vrijedi

Teorema 17 *Neka je $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup sa nepraznim interiorom i neka je $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Tada je f neprekidna na* $\operatorname{int} \mathcal{C}$.

Dokaz. Neka je $g(x) = f(x + x^0) - f(x^0)$, $x^0 \in \operatorname{int} \mathcal{C}$. Tada je g konveksna i $g(\mathbf{0}) = 0$. Treba dokazati da je g neprekidna u $\mathbf{0}$. Prije svega postoji $t > 0$ takav da je zatvorena kugla

$$tB_1 \subseteq \mathcal{C} - \{x^0\},$$

i g je ograničena na toj kugli. Ograničenost slijedi iz teoreme Minkovskog i Jensenove nejednakosti (vidjeti i....). Neka je sada $\varepsilon \in]0, 1[$. Za sve $x \in \varepsilon t B_1$ vrijedi

$$g(x) = g\left((1-\varepsilon)\mathbf{0} + \varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}x\right)\right) \leqslant (1-\varepsilon)g(\mathbf{0}) + \varepsilon g\left(\frac{1}{\varepsilon}x\right) \leqslant \varepsilon M.$$

Isto tako, iz zapisa

$$\mathbf{0} = \frac{1}{1+\varepsilon}x + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(-\frac{1}{\varepsilon}x\right),$$

dobijamo $g(x) \geqslant -\varepsilon M$. Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x \in \delta B_1$ vrijedi

$$|g(x) - g(\mathbf{0})| \leqslant \varepsilon M. \ \square$$

Situacija se mijenja ako se neprekidnost posmatra na čitavom $\mathcal{C}$, koji nije otvoren skup.

Primjer 17 *f data sa* $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$ *je konveksna, ali u 0 nije neprekidna, čak ni poluneprekidna odozdo. Uočimo da je njen nivoski skup* $\operatorname{lev}(\frac{1}{2}) =]0, +\infty[$ *otvoren.*

Postoje odozdo poluneprekidne konveksne funkcije koje nisu neprekidne.

Primjer 18 $f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + \dfrac{x_2^2}{x_1}, & x_1 > 0 \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$ *je konveksna, zatvorena, ali nije neprekidna. Ovdje se nejednakost* (16) *pri* $x^1 = (\xi_1, \eta_1)$ $x^2 = (\xi_2, \eta_2)$ *svodi na* $0 \leqslant (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2$. *Nivoski skupovi su zatvoreni:* $\varnothing$, $\{\mathbf{0}\}$ *i* $\mathcal{B}((\frac{\alpha}{2}, 0), \frac{\alpha}{2})$. *Funkcija nije neprekidna u* $\mathbf{0}$, *zbog* $f(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \nrightarrow f(0, 0)$.

Inače pojam poluneprekidnosti je posebno važan, pa ćemo mu posvetiti više pažnje. Uopšte vrijedi

Teorema 18 *Funkcija f je poluneprekidna odozdo na skupu $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ako i samo ako je svaki njen nivoski skup zatvoren u $\mathcal{S}$, ili ako i samo ako je* epi$f$ *zatvoren skup u $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$.*

Ako je skup $\mathcal{S}$ zatvoren, onda za poluneprekidnost odozdo je potrebna i dovoljna zatvorenost nadgrafa u $\mathbb{R}^{n+1}$, odnosno zatvorenost svakog nivoskog skupa u $\mathbb{R}^n$....

Mi ćemo pokazati da se za konveksne funkcije pojmovi zatvorenosti i poluneprekidnosti odozdo ne razlikuju. Prije toga istaknimo sljedeće.

Primjedba 1 *U Primjeru 17. smo vidjeli da za konveksnu funkciju f i tačku $x^0 \in \operatorname{int} \mathcal{C}$ postoji afina minoranta takva da je*

$$a(x^0) = f(x^0),\ a(x) \leqslant f(x)\ \forall x \in \mathcal{C}. \tag{17}$$

To znači da hiperravan $\mathcal{H}\left(\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix}, \beta\right)$, $\beta = \alpha f(x^0) + \langle a, x^0 \rangle$, sadrži tačku $\begin{pmatrix} x^0 \\ f(x^0) \end{pmatrix}$, a nalazi se ispod nadgrafika epi f. Stoga se naziva potporna hiperravan (hiperravan oslonca).
Jasno, za $\xi < f(x^0)$ imamo afinu minorantu takvu da je njena vrijednost u x^0 upravo ξ. To je

$$x \mapsto a(x) + \xi - f(x^0).$$

I u slučaju da je x^0 rubna tačka domena postoji hiperravan $\mathcal{H}$ kojoj pripada $\begin{pmatrix} x^0 \\ f(x^0) \end{pmatrix}$, a epi f je u $\mathcal{H}_-$, ili $\mathcal{H}+$. Međutim ne mora da vrijedi nejednakost iz (17) pošto $\mathcal{H}$ može biti okomita na $\mathbb{R}^n$ (Primjer 19, $x^0 = 0$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(e^1, 0)$).

Ovdje možemo uočiti da ako je epi f zatvoren i konveksan, a x^0 je rubna tačka zatvorenog $\mathcal{C}$, onda nakon strogog razdvajanja skupova epi f i $\left\{\begin{pmatrix} x^0 \\ \xi \end{pmatrix}\right\}$, $\xi < f(x^0)$, dobijamo afinu funkciju a $a(x) = \langle -\frac{a}{\alpha}, x - x^0 \rangle + \xi$, za koju vrijedi $a(x) \leqslant f(x)$, za sve $x \in \mathcal{C}$, i $a(x^0) = \xi$.

Teorema 19 *Funkcija f je konveksna i poluneprekidna odozdo na zatvorenom konveksnom skupu $\mathcal{C}$ ako i samo ako je zatvorena .*

Dokaz. Neka je $f = \overline{f}$. Prema primjerma 11 i 15 f je konveksna. Pokažimo da je i poluneprekidna odozdo. Za to je dovoljna zatvorenost nivoskih skupova (teorema 20). Neka je $x^k \in$ lev (f, α) i $x^k \to x^0$. Skup $\mathcal{C}$ je zatvoren tako da je $x^0 \in \mathcal{C}$. Dalje, imamo redom za sve prirodne brojeve k $f(x^k) = \overline{f}(x^k) \leqslant \alpha$, $\sup\limits_{a \in \mathcal{A}_f} a(x^k) \leqslant \alpha$, $a(x^k) \leqslant \alpha$. Slijedi $a(x^0) \leqslant \alpha$, i $x^0 \in$ lev (f, α). Dokažimo obratnu implikaciju. Uvijek je $f \geqslant \overline{f}$ Neka je f poluneprekidna odozdo i konveksna i neka je $f(x^0) > \overline{f}(x^0)$, za neki $x^0 \in C$. Tada je $f(x^0) > \xi = \frac{f(x^0) + \overline{f}(x^0)}{2}$.

Postoji afina minoranta a funkcije f takva da je $a(x^0) = \frac{f(x^0)+\overline{f}(x^0)}{2}$. Međutim, zbog $\overline{f}(x^0) \geqslant a(x^0)$ mora da je $\overline{f}(x^0) \geqslant f(x^0)$, što je suprotno pretpostavci. Slijedi $f = \overline{f}$. $\square$

Diferencijabilnost

Kao prvo ustanovimo da konveksna funkcija f u unutrašnjoj tački x^0 domena, u svakom pravcu v, ima (jednostrani) izvod :

$$f'(x^0; v) = \lim_{x \to 0+} \frac{f\left(x^0 + tv\right) - f(x^0)}{t}$$

Naime, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $x^0 + tv \in \mathcal{C}$ za sve $|t| \leqslant \varepsilon$. Funkcija $g :]0, \varepsilon] \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t}$$

je neopadajuća, jer za $0 < t_1 < t_2 \leqslant \varepsilon$ nejednakost $g(t_1) \leqslant g(t_2)$ glasi

$$f(x^0 + t_1 v) \leqslant \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) f(x^0) + \frac{t_1}{t_2} f\left(x^0 + t_2 v\right),$$

a ova vrijedi zbog konveksnosti funkcije f. Slijedi da postoji $\lim\limits_{x \to 0+} g(t)$, koji je konačan, budući da je $g(t_0) \leqslant g(t)$ za sve $t \in]0, \varepsilon[$ i fiksiran $t_0 \in]-\varepsilon, 0[$. Dakle,

$$f'(x^0; v) = \lim_{x \to 0+} g(t) = \inf_{0 < t \leqslant \varepsilon} g(t).$$

Uočimo da je za svaki $x \in \mathcal{C}$ vektor $v = x - x^0$ dopustiv pravac, pri čemu je $\varepsilon = 1$. Sada iz prethodne formule dobijamo

$$f'(x^0; x - x^0) = \lim_{x \to 0+} g(t) = \inf_{0 < t \leqslant 1} g(t) \leqslant g(1),$$

odnosno važnu nejednakost

$$f'(x^0; x - x^0) \leqslant f(x) - f(x^0). \tag{18}$$

Sljedeće dvije teoreme sadrže kriterijume konveksnosti diferencijabilnih funkcija.

Teorema 20 *Nejednakosti*

$$f(x^2) \geqslant f(x^1) + \left\langle \nabla f(x^1), x^2 - x^1 \right\rangle \tag{19}$$

i

$$\left\langle \nabla f(x^2) - \nabla f(x^1),\ x^2 - x^1 \right\rangle \geqslant 0 \tag{20}$$

vrijede, za sve $x^1, x^2 \in \mathcal{C}$, ako i samo ako je f je konveksna na $\mathcal{C}$.

Teorema 21 *Neka je f neprekidna na $\mathcal{C}$ i dva puta neprekidno diferencijabilna na* $\operatorname{int}\mathcal{C} \neq \varnothing$. *Tada, f je konveksna na $\mathcal{C}$ ako i samo ako za sve $x \in \operatorname{int}\mathcal{C}, v \in \mathbb{R}^n$*

$$\langle \nabla^2 f(x)v, v\rangle \geqslant 0. \tag{21}$$

Subdiferencijali

Imamo, prema nejednakosti (19), da za diferencijabilnu konveksnu funkciju, za fiksiran $x^0 \in \mathcal{C}$ i sve $x \in \mathcal{C}$ vrijedi

$$f(x) - f(x^0) \geqslant \left\langle \nabla f(x^0),\ x - x^0 \right\rangle.$$

Ovo daje mogućnost uopštavanja pojma gradijenta.

Definicija 5 *Subgradijent* funkcije $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R},\ \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ u tački $x^0 \in \mathcal{S}$ je vektor $y^0 \in \mathbb{R}^n$ takav da za sve $x \in \mathcal{S}$ vrijedi

$$f(x) - f(x^0) \geqslant \langle y^0,\ x - x^0\rangle. \tag{22}$$

Skup svih subgradijenata funkcije f u x^0 naziva se subdiferencijal i označava sa $\partial f(x^0)$. Dakle, $\partial f(x^0) = \left\{ y^0\ :\ f(x) - f(x^0) \geqslant \left\langle y^0,\ x - x^0 \right\rangle \quad \forall x \in \mathcal{S} \right\}$.

Primjedba 2 *Geometrijski, hiperravan u $\mathbb{R}^{n+1}$ data sa*

$$x_{n+1} = \langle y^0,\ x - x^0\rangle + f(x^0)$$

jehiperrvan oslonca za epi f u tački $(x^0, f(x^0))$. Kako je njen vektor normale $a = \begin{pmatrix} y^0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ta hiperravan nije ortogonalna na $\mathbb{R}^n$. Jasno je i obratno, ako je hiperravan $\mathcal{H}(a, f(x^0) - \langle y^0, x^0\rangle)$ potporna za epi f u $(x^0, f(x^0))$ i nevertikalna, onda je y^0 subgradijent funkcije f u x^0. Tada je $a_{n+1} \neq 0$ i $y^0 = -\frac{1}{a_{n+1}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \partial f(x^0)$.

$\boxed{\textit{slika}}$

Na datoj slici je grafik konveksne funkcije date sa

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - x^2}, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{x}{1-x}, & 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

Uslov $\partial f(x) \neq \varnothing$ je važan pa ćemo ga posebno istaknuti.

Definicija 6 Funkcija f je subdiferencijabilna u $x^0 \in \mathcal{D}(f)$ ako je $\partial f(x^0) \neq \varnothing$.

Izložićemo osnovna svojstva subdiferencijala, kao i neke formule subdiferencijalnog računa.

Teorema 22 *Subdiferencijal je zatvoren i konveksan skup.*

Dokaz. Neka je $\partial f(x^0) \neq \varnothing$. Prvi dio tvrdnje slijedi iz neprekidnosti skalarnog proizvoda u nejednakosti iz definicije. Dalje, uzmimo $y^0, y^1 \in \partial f(x^0)$ i $\lambda \in [0,1]$. Kako za sve $x \in \mathcal{D}(f)$, i za $i = 0, 1$ imamo

$$f(x) - f(x^0) \geqslant \left\langle y^i,\ x - x^0 \right\rangle,$$

to nakon množenja sa $1 - \lambda$ (za $i = 0$), a sa λ (za $i = 1$), te sabiranja dobijamo

$$f(x) - f(x^0) \geqslant \left\langle (1-\lambda)y^0 + \lambda y^1,\ x - x^0 \right\rangle.$$

Dakle, $(1-\lambda)y^0 + \lambda y^1 \in \partial f(x^0)$. $\square$

Vidjeli smo da ni konveksna funkcija ne mora biti subdiferencijabilna u svim tačkama (npr. iz bd $\mathcal{C}$). Za ostale tačke situacija je drukčija.

Teorema 23 *Neka je f konveksna funkcija i $x^0 \in \operatorname{int} \mathcal{C}$. Tada je $\partial f(x^0) \neq \varnothing$.*

Dokaz. Za $x^0 \in \operatorname{int} \mathcal{C}$ prema primjedbi 1 (), za sve $x \in \mathcal{C}$ vrijedi

$$a(x) - a(x^0) \leqslant f(x) - f(x^0),$$

tj.

$$\left\langle -\frac{a}{\alpha}, x - x^0 \right\rangle \leqslant f(x) - f(x^0),$$

što znači da je

$$-\frac{a}{\alpha} \in \partial f(x^0). \quad \square$$

Ustanovimo vezu između subdiferencijala i jednostranih izvoda. Tim ćemo dobiti još jedan uslov da je subdiferencijal neprazan.

Teorema 24 *Neka je f konveksna na $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$, $x^0 \in \mathcal{C}$. Tada je*

$$y^0 \in \partial f(x^0)$$

ako i samo ako za svaki dopustivi pravac v vrijedi

$$\left\langle y^0,\ v \right\rangle \leqslant f'(x^0; v). \tag{23}$$

Dokaz. Neka je y^0 subgradijent i v dopustiv pravac. Tada, za sve $t \in]0, t_0[$ je $x^0 + tv \in \mathcal{C}$ i $f\left(x^0 + tv\right) - f\left(x^0\right) \geqslant \left\langle y^0,\ tv \right\rangle$, odakle je $f'\left(x^0; v\right) \geqslant \left\langle y^0,\ v \right\rangle$. Obratno, iz (18) i (23) direktno slijedi (22). $\square$

Primjedba 3 *Iz (23) slijedi $\sup_{y \in \partial(x^0)} \langle y, v \rangle \leqslant f'(x^0; v)$. Ako je $x^0 \in \operatorname{int} \mathcal{C}$, onda je funkcija $v \mapsto f'(x^0; v)$ konveksna na $\mathbb{R}^n$. Zbog neprekidnosti ona je ograničena na jediničnoj kugli. Sada imamo, da za sve $y \in \partial(x^0), y \neq \mathbf{0}$ vrijedi $\langle y, \frac{y}{\|y\|} \rangle \leqslant f'(x^0; \frac{y}{\|y\|}) \leqslant M$, tj. $\|y\| \leqslant M$. Znači, $\partial(x^0)$ je ograničen skup, pa iz Teoreme 24, slijedi njegova kompaktnost. Prethodna nejednakost postaje $\max\limits_{y \in \partial(x^0)} \langle y, v \rangle \leqslant f'(x^0; v)$. Za $x^0 \in \operatorname{int} \mathcal{C}$ i sve $v \in \mathbb{R}^n$ vrijedi i više (Zadatak...)*

$$\max_{y \in \partial(x^0)} \langle y, v \rangle = f'(x^0; v). \tag{24}$$

Teorema 25 *Konveksna funkcija f je diferencijabilna u $x^0 \in \operatorname{int} \mathcal{C}$ ako i samo ako je $\partial f(x^0)$ jednočlan skup.*

Za računanje subdiferencijala važno je naredno tvrđenje.

Teorema 26 (Moro - Rokafelar) *Neka su f_1, f_2 konveksne funkcije na skupu $\mathcal{C}$ sa nepraznim interiorom. Tada za sve $x^0 \in \mathcal{C}$ vrijedi*

$$\partial(f_1 + f_2)(x^0) = \partial f_1(x^0) + \partial f_2(x^0). \tag{25}$$

Konjugovane funkcije

Problem minimizacije funkcije f na skupu $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ je ekvivalentan sa problemom $-\max\,(-f(x)), x \in \mathcal{S}$. U vezi s njima korisno je razmotriti skup problema

$$-\max\,\{\langle y,\ x\rangle - f(x) : x \in \mathcal{S}\},$$

za sve $y \in \mathbb{R}^n$. Vidimo da se ovdje javlja nova funkcija

$$y \mapsto \max_{x \in \mathcal{C}}\,(\langle y, x\rangle - f(x))$$

vezana za f. Označava se sa f^c i naziva konjugovana funkcija funkcije f.

Definicija 7 *Konjugovana funkcija funkcije $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n$ je funkcija $f^c : \mathcal{D}_{f^c} \to \mathbb{R}$,*

$$f^c(y) = \sup_{x \in \mathcal{D}_f}\,(\langle y,\ x\rangle - f(x)), \tag{26}$$

gdje je $\mathcal{D}(f^c)$ skup tačaka za koje je supremum konačan.

Primjedba 4 *Situcija u kojoj je $\mathcal{D}(f^c) = \varnothing$ nije isključena, što pokazuje primjer funkcije $f(x) = x^3$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Ovdje je $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}}\,(yx - x^3) = +\infty$, za sve $y \in \mathbb{R}$.*

Ako je domen konjugovane funkcije neprazan možemo odmah ustanoviti neka njena bitna svojstva.

Teorema 27 *Neka je f proizvoljna funkcija za koju je $\mathcal{D}_{f^c} \neq \varnothing$. Tada je $\mathcal{D}_{f^c}$ konveksan skup, a f^c zatvorena konveksna funkcija .*

Dokaz. Za $y^1, y^2 \in \mathcal{D}_{f^c}, \lambda \in [0,1]$ vrijedi

$$\sup_{x \in \mathcal{D}_f}\,\big(\big\langle (1-\lambda)y^1 + \lambda y^2,\ x\big\rangle - f(x)\big) \leqslant$$
$$(1-\lambda)\sup_{x \in \mathcal{D}_f}\,\big(\big\langle y^1,\ x\big\rangle - f(x)\big) + \lambda \sup_{x \in \mathcal{D}_f}\,\big(\big\langle y^2,\ x\big\rangle - f(x)\big) < +\infty,$$

te je $(1-\lambda)y^1 + \lambda y^2 \in \mathcal{D}_{f^c}$, i $f^c\left((1-\lambda)y^1 + \lambda y^2\right) \leqslant (1-\lambda) f^c\left(y^1\right) + \lambda f^c\left(y^2\right)$. Uostalom, nadgraf epi f^c je zatvoren i konveksan skup. $\square$

Iz definicije direktno slijedi da za sve $x \in \mathcal{D}_f$ i sve $y \in \mathcal{D}_{f^c}$ vrijedi

$$f(x) + f^c(y) \geqslant \langle x, y \rangle. \tag{27}$$

Ova nejednakost se zove Fenhelova ili Jang-Fenhelova. Prirodno je definisati konjugovanu funkciju funkcije f^c, i ustanoviti njenu vezu sa f. Umjesto $(f^c)^c$ pišemo f^{cc}, i to je bikonjugovana funkcija funkcije f. Dakle

$$f^{cc}(x) = \sup_{y \in D_{f^c}} (\langle x, y \rangle - f^c(y)). \tag{28}$$

Koristeći Fenhelovu nejednakost $f(x) \geqslant \langle y, x \rangle - f^c(y)$, na osnovu (28) dobijamo da za sve $x \in \mathcal{D}(f)$ vrijedi

$$f(x) \geqslant f^{cc}(x). \tag{29}$$

slike f...

Neka je $\mathcal{D}(f^c) \neq \varnothing$. Kao i gore f ima afinu minorantu, i vrijedi $\mathcal{A}_f \subseteq \mathcal{D}(f^c)$, pošto za $a \in \mathcal{A}_f$ tj. iz $\langle a, x \rangle - \alpha \leqslant f(x)$ $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ slijedi $\langle a, x \rangle - f(x) \leqslant \alpha$ pa je $a \in \mathcal{D}(f^c)$. Dalje je $f^c(a) \leqslant \alpha$, odakle je $\langle a, x \rangle - \alpha \leqslant \langle a, x \rangle - f^c(a)$,

$$\sup_{a \in \mathcal{A}_f} (\langle a, x \rangle - \alpha) \leqslant \sup_{a \in \mathcal{D}(f)} (\langle a, x \rangle - f^c(a)),$$

$$\overline{f}(x) \leqslant f^{cc}(x). \tag{30}$$

Odgovor na pitanje kada su funkcija i njena bikonjugovana funkcija jednake direktno izlazi iz nejednakosti (29) i (30)

Teorema 28 (Fenhel-Moro) *Funkcija f je odozdo poluneprekidna i konveksna na zatvorenom $\mathcal{C}$ ako i samo ako je*

$$f = f^{cc}. \tag{31}$$

Dokaz. Iz jednakosti slijedi da je f konveksna, i poluneprekidna odozdo (f^{cc} je konveksna i zatvorena). Obratno, iz konveksnosti i poluneprekidnosti je $f = \overline{f}$. Kako još imamo $\overline{f} \leqslant f^{cc} \leqslant f$, slijedi $f = f^{cc}$. $\Box$

Veza između subdiferencijala funkcije f i njene konjugovane funkcije data je sljedećim tvrđenjima.

Teorema 29 *Neka je f proizvoljna funkcija i $x^0 \in \mathcal{D}_f$. Tada vrijedi*

$$y^0 \in \partial f(x^0) \Longleftrightarrow f^c(y^0) + f(x^0) = \left\langle y^0, x^0 \right\rangle, \tag{32}$$

$$y^0 \in \partial f(x^0) \Longrightarrow x^0 \in \partial f^c\left(y^0\right). \tag{33}$$

Ako je f konveksna i zatvorena u x^0, onda vrijedi i obratna implikacija.

Dokaz. $y^0 \in \partial f(x^0)$ povlači $f(x) - f(x^0) \geqslant \left\langle y^0,\ x - x^0 \right\rangle$, odnosno

$$\left\langle y^0,\ x^0 \right\rangle - f(x^0) \geqslant \left\langle y^0,\ x \right\rangle - f(x),$$

za sve $x \in \mathcal{D}_f$, što znači da je $y^0 \in \mathcal{D}(f^c)$ i $\left\langle y^0,\ x^0 \right\rangle - f(x^0) \geqslant f^c(y^0)$. Pomoću Fenhelove nejednakosti dobijamo $\left\langle y^0,\ x^0 \right\rangle = f(x^0) + f^c\left(y^0\right)$.

Na drugu stranu, iz ove jednakosti imamo

$$\langle y^0, x^0 \rangle - f(x^0) = f^c(y^0) \geqslant \langle y^0,\ x \rangle - f(x),$$

tj. za sve $x \in \mathcal{D}_f$ vrijedi $\langle y^0,\ x - x^0 \rangle \leqslant f(x) - f(x^0)$, te je $y^0 \in \partial f(x^0)$.

U dokazu druge formule pođimo od $y^0 \in \partial f(x^0)$. Prema već dokazanom je

$$f^c(y^0) - \langle x^0,\ y^0 - y \rangle = \langle y,\ x^0 \rangle - f(x^0) \leqslant f^c(y).$$

Znači, za sve $y \in \mathcal{D}_{f^c}$ imamo $f^c(y) - f^c(y^0) \geqslant \langle x^0,\ y - y^0 \rangle$, tj. $x^0 \in f^c(y^0)$. Obratno, iz prve ekvivalencije i Moro-Fenhelove teoreme (tj. $f(x^0) = f^{cc}(x^0)$) slijedi

$$\begin{gathered} x^0 \in f^c(y^0) \Longrightarrow f^{cc}(x^0) + f^c(y^0) = \langle x^0, y^0 \rangle \Longrightarrow \\ f(x^0) + f^c(y^0) = \langle x^0, y^0 \rangle \Longrightarrow y^0 \in \partial f(x^0). \quad \square \end{gathered}$$

Primjer 19 *Funkcija* $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \in]0, 1] \end{cases}$ *, je konveksna, i* $\partial f(0) = \varnothing$. *Njena konjugovana funkcija je* $f^c(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0 \\ y, & y \geqslant 0 \end{cases}$ *, dok je* $\partial f^c(0) = [0, 1]$. *Uočimo da* f *nije zatvorena u* 0. *Ako modifikujemo* f *tako da je* $f(x) = 0$ *za* $x > 0$, *onda je isto* $\partial f(0) = \varnothing$, *dok je domen konjugovane* $]-\infty, 0]$, $f^c(y) = 0$, *a* $\partial f^c(0) = [0, +\infty[$. $\square$

Primjer 20 *Za afinu funkciju*

$$f(x) = \langle a, x \rangle + \beta$$

vrijedi

$$\mathcal{D}_{f^c} = \{a\},\ f^*(a) = -\beta.$$

Jedina potporna hiperravan na epif je data navedenom afinom funkcijom, te je jasno $\mathcal{D}_{f^c} = \{a\}$. *Zbog* $\nabla f(x) = a$ *vrijedi* $f^c(a) = \langle a, x \rangle - \langle a, x \rangle - \beta = -\beta$. *Detaljnije,*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\langle y, x \rangle - \langle a, x \rangle - \beta \right) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle y - a, x \rangle - \beta$$

je konačan samo za $y = a$. *Inače, za* $x = t(y - a) \neq \mathbf{0}$ *imamo*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle y - a, x \rangle \geqslant \sup_{t > 0} t\|y - a\|^2 = +\infty. \quad \square$$

Primjer 21 *Ako je* C *simetrična PsemiD matrica reda n,*

$$q(x) = \frac{1}{2}\langle \mathrm{C}x, x\rangle,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

onda je konjugovana funkcija q^* *data sa*

$$q^*(\mathrm{C}x) = \frac{1}{2}\langle \mathrm{C}x, x\rangle,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{34}$$

U slučaju da je C *PD matrica, iz* $\nabla q(x) = \mathrm{C}x = y$ *dobijamo* $x = \mathrm{C}^{-1}y$*, tako da formula (30) postaje*

$$q^c(y) = \langle y, \mathrm{C}^{-1}y\rangle - \frac{1}{2}\langle y, \mathrm{C}^{-1}y, \rangle = \frac{1}{2}\langle \mathrm{C}^{-1}y, y\rangle,\ y \in \mathbb{R}^n.$$

Pokažimo da je $\mathcal{D}_{q^c} = \{\mathrm{C}x : x \in \mathbb{R}^n\}$ *ako* C *jeste PsemiD, ali ne i PD matrica. Zaista, iz* $y \in \mathcal{D}_{q^c}$ *je*

$$q^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\langle y, x\rangle - f(x)\right) \geqslant \sup_{\alpha\in\mathbb{R}}\left(\langle y, \alpha x^0\rangle - \frac{\alpha^2}{2}\langle \mathrm{C}x^0, x^0\rangle\right),$$

za fiksiran $x^0 \neq \mathbf{0}$*, koji ćemo izabrati tako da bude* $\langle \mathrm{C}x^0, x^0\rangle = 0$*. Sada slijedi* $q^c(y) \geqslant \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \alpha\langle y, x^0\rangle$*, odakle proizilazi jednakost* $\langle y, x^0\rangle = 0$*. Znači da je* y *ortogonalan na* $\{x : \mathrm{C}x = \mathbf{0}\}$*, pa se nalazi u* $\{\mathrm{C}x : x \in \mathbb{R}^n\}$*. Obratno, za* $y = \mathrm{C}x$ *imamo*

$$q^c(\mathrm{C}x) = \sup_{v\in\mathbb{R}^n}\left(\langle \mathrm{C}x, v\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathrm{C}v, v\rangle\right) = \frac{1}{2}\langle \mathrm{C}x, x\rangle - \frac{1}{2}\inf_{v\in\mathbb{R}^n}\langle \mathrm{C}(v-x), v-x\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\langle \mathrm{C}x, x\rangle.$$

Specijalno, za $\mathrm{C} = \mathrm{I}$ *dobija se rezultat za euklidsku normu.* $\square$

Konveksne funkcije sa vrijednostima u$\overline{\mathbb{R}}$

Neka je $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ prošireni skup realnih brojeva.
Svaka funkcija $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R},\ \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ može se dodefinisati na sljedeći način

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathcal{S} \\ +\infty, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}, \end{cases} \tag{35}$$

tako da vrijedi

$$\min_{x\in\mathcal{S}} f(x) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x).$$

Posebno je važno da se konveksnost funkcije f može prenijeti na $\widetilde{f}$. Posmatraćemo sada funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Kažemo da je takva funkcija konveksna ako je njen nadgrafik konveksan skup, što je ekvivalentno sa

$$f\left((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2\right) \leqslant (1-\lambda)\alpha + \lambda\beta,$$

za sve $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n, \alpha \geqslant f(x^1), \beta \geqslant f(x^2)$ i sve $\lambda \in [0,1]$. Skup

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}$$

naziva se efektivni domen funkcije f i on je konveksan ako je f konveksna. Nas će zanimati funkcije koje ne uzimaju vrijednost $-\infty$, a identički nisu $+\infty$, odnosno ako vrijedi

$$\mathrm{dom}(f) \neq \varnothing, \quad -\infty \notin f(\mathbb{R}^n). \tag{36}$$

Primjedba 5 *Ako nije ispunjen ovaj uslov, konveksna funkcija može biti konačna jedino na rubu svog efektivnog domena. Zaista, ako je* $x \in \mathrm{int}\ \mathrm{dom}(f), f(x^1) = -\infty$*, postoje* $x^2 \in \mathrm{dom}(f), \lambda \in]0,1[$*, za koje je* $x = (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2$*, i pri tome vrijedi*

$$f(x) \leqslant (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2) = -\infty.$$

Primjer jedne takve funkcije je

$$f(x) = \begin{cases} -\infty, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ +\infty, & x > 0. \end{cases}$$

Definicije iz ranijih razmatranja prenose se i na funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, uz uobičajene operacije sa $\pm\infty$. Tako je f poluneprekidna odozdo u $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ako je

$$f(x^0) \leqslant \varliminf_{x \to x^0} f(x).$$

Ovdje uočimo da iz neprekidnosti funkcije f ne slijedi da je (polu)neprekidna i funkcija $\widetilde{f}$, data formulom (33) .
Na primjer, $f(x) = x$ je neprekidna na $]0, +\infty[$, ali

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ +\infty, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

nije ni poluneprekidna u 0.
Vektor $y^0 \in \mathbb{R}^n$ je subgradijent funkcije f u x^0 ako za sve $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$f(x) \geqslant f(x^0) + \langle y^0, x - x^0 \rangle.$$

Neposredno slijedi da $f(x^0) = -\infty$ povlači $\partial f(x^0) = \mathbb{R}^n$, kao i da je $\overline{f} \equiv -\infty$. U suprotnom imamo važno tvrđenje, koje se dokazuje kao teorema 26.

Teorema 30 *Ako je konveksna funkcija* f *konačna u tački* x^0 *onda vrijedi*

$$\partial f(x^0) = \{y^0 : f'(x^0; v) \geqslant \langle y^0, v \rangle \quad \forall v\}.$$

S druge strane imamo da, ako je $f(x^0)$ konačan i $\partial f(x^0) \neq \varnothing$, onda je f konveksna i vrijedi (34).
Konjugovana funkcija za $f : \mathbb{R}^n \to]-\infty, +\infty]$

$$f^c(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle y, x \rangle - f(x)\}$$

može uzeti vrijednost $+\infty$. Pri tome, ako je $f^c \equiv +\infty$, onda je $f^{cc} \equiv -\infty$.
Mi ćemo redovno posmatrati konveksne funkcije uz uslov (34).

Primjer 22 *Za linearnu funkciju* $l(x) = \langle a, x\rangle, a \neq \mathbf{0}$, *na* $\mathbb{R}^n$ *imamo*

$$l^c(y) = \begin{cases} 0, & y = a \\ +\infty, & y \neq a \end{cases}$$

Primjer 23 *Karakteristična (indikatorna) funkcija skupa* $\mathcal{C}$

$$i_{\mathcal{C}}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathcal{C} \\ +\infty, & x \notin \mathcal{C} \end{cases}$$

je konveksna, ako je $\mathcal{C}$ *konveksan skup. Njena konjugovana funkcija*

$$i_{\mathcal{C}}^c(y) = \sup_{x \in \mathcal{C}} \langle y, x\rangle$$

naziva se potporna funkcija skupa $\mathcal{C}$. *Označava se sa* $s_{\mathcal{C}}$, *tj. imamo*

$$s_{\mathcal{C}}(x) = \sup_{y \in \mathcal{C}} \langle x, y\rangle.$$

Dakle, $l^c(y) = i_{\{a\}}(y)$. Uočimo da za funkciju $\widetilde{f}$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\widetilde{f}(x) = f(x) + i_{\mathcal{C}}(x).$$

Primjer 24 *Ako je* $\mathcal{C}$ *konveksan skup, funkcija* $f = d(\cdot, \mathcal{C})$ *tj. udaljenost tačke od skupa* $\mathcal{C}$, *data sa*

$$f(x) = \inf_{v \in \mathcal{C}} \|x - v\|,$$

je konveksna funkcija. Da bismo odredili njenu konjugovanu funkciju uočimo da je $f = f_1 \oplus f_2$, *gdje je* $f_1(x) = \|x\|$, *a* $f_2(x) = i_{\mathcal{C}}(x)$. *Sada je, prema teoremi*

$$f^{\,c}(y) = f_1^{\,c}(y) + f_2^{\,c}(y) = \delta_{\mathcal{B}}(y) + \delta_{\mathcal{C}}^c(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in \mathcal{C}} \langle y, x\rangle, & y \in \mathcal{B} \\ +\infty, & y \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

Na kraju dokažimo teoremu koju ćemo koristiti u teoriji dualnosti.

Teorema 31 *Konveksna funkcija, konačna u* x^0 *je subdiferencijabilna u* x^0 *ako i samo ako vrijedi*

$$f'(x^0; v) > -\infty, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Dokaz. Neka je $\partial f(x^0) = \varnothing$, tada je njegova potporna funkcija

$$s_{\partial f(x^0)} = -\infty.$$

S druge strane, kako je

$$v \mapsto f'(x^0; v)$$

konveksna, pozitivno homogena, njena konjugovana funkcija je indikatorna za neki konveksan skup. Iz Fenhelove nejednakosti i teoreme 37 slijedi da je to upravo subdiferencijal u x^0. Dakle, zbog imamo (46)

$$s_{\partial f(x^0)}(v) = \mathrm{cl} f'(x^0; v),$$

pa mora postojati vektor v^0 takav da je $f'(x^0; v^0) = -\infty$. $\square$

Konveksne funkcije i ekstremi

Konveksne funkcije imaju niz svojstava koja olakšavaju određivanje ekstrema:

Svaki lokalni minimum je globalni minimum.

Skup tačaka minimuma je konveksan skup, a ako je f strogo konveksna, taj skup je najviše jednočlan.

Tačka strogog maksimuma konveksne funkcije nije u skupu int $\mathcal{D}_f$.

x^* je tačka globalnog minimuma diferencijabilne konveksne funkcije f na konveksnom skupu $\mathcal{C}$ ako i samo ako vrijedi

$$\langle \nabla f(x^*),\ x - x^* \rangle \geqslant 0 \quad \textit{za sve } x \in \mathcal{C}. \tag{37}$$

Ako f nije diferencijabilna prethodna nejednakost se zamjenjuje sa

$$\mathbf{0} \in \partial f(x^*). \tag{38}$$

Dokažimo prvo tvrđenje. Neka je $f(x^*)$ minimum funkcije f na $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$ i neka je $x \in \mathcal{D}_f$. Postoji broj λ takav da je $\lambda x + (1-\lambda)x^* \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$ (npr. ako je x van te kugle, dovoljno je uzeti neki $\lambda \in]\ 0, \frac{\varepsilon}{\|x - x^*\|}[.)$ Sada je, zbog konveksnosti funkcije f, $f(x^*) \leqslant f((1-\lambda)x^* + \lambda x) \leqslant (1-\lambda)f(x^*) + \lambda f(x)$, odakle je $f(x^*) \leqslant f(x)$ za sve $x \in \mathcal{D}_f$.

Ako bi konveksna funkcija imala strogi maksimum u $x^* \in \text{int}\ \mathcal{D}_f$, za neke tačke $x^1, x^2 \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon) \subseteq \text{int}\ \mathcal{D}_f$ bilo bi

$$2x^* = x^1 + x^2, \quad \text{i} \quad f(x^*) = f\left(\frac{x^1 + x^2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x^1) + f(x^2)}{2} < f(x^*).$$

U vezi sa maksimumom konveksne funkcije navedimo sljedeće. Ako je $\mathcal{C} \subset \text{int}\ \mathcal{D}_f$ kompaktan skup, onda postoji $x^* \in \mathcal{C}$, tačka globalnog maksimuma, pošto je f neprekidna. Kompaktan, konveksan $\mathcal{C}$ je konveksni omotač svojih vrhova, pa je $x^* = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v^i$, $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0$. Dalje je $f(x^*) = f\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v^i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{s} \lambda_i f(v^i) \leqslant \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \max_{i \in \{1,\ldots,s\}} f(v^i) = \max_{i \in \{1,\ldots,s\}} f(v^i) \leqslant f(x^*)$. Dakle, vrijedi

$$\max_{i \in \{1,\ldots,s\}} f(v^i) = f(x^*),$$

tako da postoji vrh skupa $\mathcal{C}$ u kojem f dostiže maksimum na $\mathcal{C}$. Posljednje tvrđenje slijedi direktno iz nejednakosti (19), odnosno (22). Inače uslov (37) možemo zamijeniti sa

$$\langle \nabla f(x^*),\ v \rangle \geqslant 0 \quad \text{za sve dopustive pravce } v \text{ u } x^*. \tag{39}$$

Zaista, iz $x^*, x \in \mathcal{C}$ slijedi $x^* + \lambda(x - x^*) \in \mathcal{C}$, za sve $\lambda \in]0,1[$, tako da je $x - x^*$ dopustiv pravac, za sve $x \in \mathcal{C}$. Obratna implikacija je jasna.

Primjeri konveksnih funkcija

Primjer 25 *Kob - Daglasova funkcija*

$$f(x) = \alpha_0\, x_1^{\alpha_1} \cdots\, x_n^{\alpha_n},\ x \in \mathbb{R}_+^n,\ \alpha_0 < 0,\ \alpha_1 > 0, ...,\ \alpha_n > 0$$

je konveksna za $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant 1$.

Zaista,

$$\left\langle \nabla^2 f(x) v,\ v \right\rangle = f(x) \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{v_i}{x_i} \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{v_i^2}{x_i^2} \right),$$

tako da iz nejednakosti Koši-Bunjakovskog je $\langle \nabla^2 f(x)\, v, v\, \rangle \geqslant 0$.

Ako je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i > 1$, f nije konveksna, jer stavljajući $\mathbf{1} = (1, ..., 1)$ imamo

$$f\left(\frac{\mathbf{0} + \mathbf{1}}{2}\right) = \alpha_0\, 2^{-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} > \alpha_0\, 2^{-1} = \frac{f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{1})}{2}. \quad \square$$

Problemu (KP):

$$\inf\, \{f(x)\ :\ x \in \mathcal{G}\}, \quad \mathcal{G} = \{x \in \mathcal{C}\ :\ g(x) \leqslant \mathbf{0}\}$$

dodijeljena je Lagranžova funkcija $L\ :\ \mathcal{C} \times \mathbb{R}_+^m\ \to\ \mathbb{R}$

$$L(x, u) = f(x) + \langle u, g(x) \rangle$$

Primjer 26 *Funkcija*
a) $x \mapsto L(x, u)$ *je konveksna, ako je* f *konveksna, a* g *konveksna vektorska funkcija,*
b) $u \mapsto \varphi(u) = \inf_{x \in \mathcal{C}} L(x, u)$ *je konkavna na* $\mathbb{R}_+^m$.

Jasno a) direktno slijedi iz Teoreme 13., dok za b) imamo

$$\varphi(\lambda_1 u^1 + \lambda_2 u^2) = \inf_x\ \left(f(x) + \left\langle \lambda_1 u^1 + \lambda_2 u^2,\ g(x) \right\rangle\right) =$$

$$= \inf_x\ \left(\lambda_1 f(x) + \lambda_1 \langle u^1,\ g(x) \rangle + \lambda_2 f(x) + \lambda_2 \langle u^2,\ g(x) \rangle\right) \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_1 \inf_x\ \left(f(x) + \langle u^1,\ g(x) \rangle\right) + \lambda_2 \inf_x\ \left(f(x) + \langle u^2,\ g(x) \rangle\right) =$$

$$= \lambda_1 \varphi(u^1) + \lambda_2 \varphi(u^2),\ \text{za sve}\ \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Primjer 27 *U optimizaciji je posebno važna marginalna funkcija koja se pridružuje problemu (P) (funkcija osjetljivosti problema (P)). Označava se sa p, a data je sa*

$$p(v) = \inf_{x \in G(v)} f(x) \quad v \in \mathbb{R}^m,$$

gdje je

$$\mathcal{G}(v) = \{x \in \mathcal{D} \ : \ g(x) \leqslant v\}, \ \mathcal{G}(\mathbf{0}) = \mathcal{G}.$$

Ponekad ćemo pisati

$$p(v) = \inf_{g(x) \leqslant v} f(x).$$

Primjetimo da zbog $\mathcal{G}(\mathbf{0}) = \mathcal{G}$ za optimalnu vrijednost π problema (P) imamo

$$\pi = p(\mathbf{0}).$$

Vidjećemo da to nije jedini motiv za izučavanje ovih funkcija.
Neka je $\mathcal{V} = \{v : \mathcal{G}(v) \neq \varnothing\}$. Što se tiče domena imamo sljedeće. Ako je $\mathcal{D}$ neprazan, onda je i $\mathcal{V}$ neprazan (za x^0 iz $\mathcal{D}$, $f(x^0)$ je u $\mathcal{V}$). Dalje, za $v^0 \in \mathcal{V}$ i x^0 takav da je $g(x^0) \leqslant v^0$ imamo $p(v^0) \leqslant f(x^0) < +\infty$, pa vrijedi $dom(p) = \mathcal{V}$. Za jednakost

$$\mathcal{D}(p) = V,$$

trebaju i dodarni uslovi: ako je

$$\pi > -\infty \quad \text{i} \quad \mathcal{L} = \text{lev}(-\varphi; -\pi) \neq \varnothing,$$

onda je domen marginalne funkcije skup $\mathcal{V}$, sa nepraznim interiorom.
Zaista, neka je $y^0 \in \mathcal{L}$. Vrijedi $-\varphi(y^0) \leqslant -\pi$, odakle je $\pi \leqslant \varphi(y^0) \leqslant f(x) + \langle y^0, g(x)\rangle$. Za sve v i sve $x \in G(v)$ je $\langle y^0, g(x)\rangle \leqslant \langle y^0, v\rangle$, pa zaključujemo

$$-\infty < \pi - \langle y^0, v\rangle < p(v).$$

Od svojstava funkcije p navedimo sljedeća:
a) Bez obzira kakve su funkcije f i g, funkcija p je opadajuća, tj.

$$v^1 \leqslant v^2 \implies p(v^1) \geqslant p(v^2).$$

Iz ovog svojstva slijedi

$$y \in \partial p(\mathbf{0}) \Longrightarrow y \leqslant \mathbf{0}. \tag{40}$$

b) Ako su f i g konveksne na $\mathcal{C}$, onda je p konveksna na V.

c)

$$\partial p(\mathbf{0}) = -\mathcal{L}. \tag{41}$$

d)

$$p^c(-u) = -\varphi(u), \quad u \in \mathbb{R}^m_+. \tag{42}$$

Dokaz. a)

$$v^1 \leqslant v^2 \;\Rightarrow\; \mathcal{G}(v^1) \subseteq \mathcal{G}(v^2) \Rightarrow\; p(v^1) \geqslant p(v^2).$$

Dalje, zbog $\mathbf{0} \leqslant e^i$ je $p(\mathbf{0}) \geqslant p(e^i)$ i $0 \geqslant p(e^i) - p(\mathbf{0}) \geqslant \langle y, e^i - \mathbf{0}\rangle = y_i, i = \overline{1,m}.$

b) Neka je $v^1, v^2 \in V,\; \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0,\; \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoje $x_\varepsilon^1 \in \mathcal{G}(v^1), x_\varepsilon^2 \in \mathcal{G}(v^2)$ takvi da vrijedi

$$p(v^1) \leqslant f(x_\varepsilon^1) < p(v^1) + \varepsilon, \quad p(v^2) \leqslant f(x_\varepsilon^2) < p(v^2) + \varepsilon.$$

Zbog konveksnosti funkcije g je $\lambda_1 x_\varepsilon^1 + \lambda_2 x_\varepsilon^2 \in \mathcal{G}(\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2)$, tako da imamo

$$p(\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2) = \inf_{x \in \mathcal{G}(\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2)} f(x) \leqslant f(\lambda_1 x_\varepsilon^1 + \lambda_2 x_\varepsilon^2) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_1 f(x_\varepsilon^1) + \lambda_2 f(x_\varepsilon^2) < \lambda_1 p(v^1) + \lambda_2 p(v^2) + 2\varepsilon.$$

Pošto je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, mora biti

$$p(\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2) \leqslant \lambda_1 p(v^1) + \lambda_2 p(v^2).$$

c) Iz $-y^0 \in \mathcal{L}$ slijedi

$$p(\mathbf{0}) \leqslant \inf_x \left(f(x) - \langle y^0, g(x)\rangle\right),$$

Neka je $v \in V$ i x takav da je $g(x) \leqslant v$. Zbog $-y^0 \geqslant \mathbf{0}, v - g(x) \geqslant \mathbf{0}$ je $\langle -y^0, g(x)\rangle \leqslant \langle -y^0, v\rangle$, pa imamo

$$p(\mathbf{0}) + \langle y^0, v\rangle \leqslant f(x),$$

$$p(\mathbf{0}) + \langle y^0, v\rangle \leqslant \inf_{g(x) \leqslant v} f(x) = p(v),$$

što znači da je $y^0 \in \partial p(\mathbf{0})$. Dakle, $-\mathcal{L} \subseteq \partial p(\mathbf{0})$.
Neka je sada $y^0 \in \partial p(\mathbf{0})$. Za sve $v \in V$ vrijedi $p(v) - p(\mathbf{0}) \geqslant \langle y^0, v\rangle$ Uzmimo fiksiran $x^0 \in \mathcal{D}$ i stavimo $v^0 = g(x^0)$. Sada vrijedi

$$p(\mathbf{0}) \leqslant p(v^0) + \langle -y^0, v^0\rangle,$$

odakle je, zbog $p(v^0) = \inf\limits_{g(x) \leqslant g(x^0)} f(x) \leqslant f(x^0)$,

$$p(\mathbf{0}) \leqslant f(x^0) + \langle -y^0, g(x^0)\rangle,$$

i

$$p(\mathbf{0}) \leqslant \inf_{x^0} f(x^0) + \langle -y^0, g(x^0)\rangle = \varphi(-y^0).$$

Kako je prema (38) $y^0 \leqslant \mathbf{0}$, dobijamo $-y^0 \in \mathcal{L}$, pa je $\partial p(\mathbf{0}) \subseteq -\mathcal{L}$.

d) Stavimo da je $\widetilde{f}(x,v) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathcal{G}(v) \\ +\infty, & \text{inače} \end{cases}$, tako da je $p(v) = \inf\limits_{x \in D} \widetilde{f}(x,v)$.

$$p^c(-u) = \sup_{v \in \mathbb{R}^m} \left(\langle -u,\ v\rangle - p(v)\right) = \sup_{v \in \mathbb{R}^m} \left(\langle -u,\ v\rangle - \inf_{x \in D}\ \widetilde{f}(x,v)\right) =$$

$$= \sup_{x\in\mathcal{D}} \sup_{v\in\mathbb{R}^m} (\langle -u,\ v\rangle - \widetilde{f}(x,v)) = \sup_{x\in\mathcal{D}} \sup_{v:g(x)\leqslant v} (\langle -u,\ v\rangle - \widetilde{f}(x,v)) =$$

$$= \sup_{x\in\mathcal{D}} (-\langle u, g(x)\rangle - f(x)) = -\inf_{x\in\mathcal{D}} (f(x) + \langle u, g(x)\rangle) = -\varphi(u). \quad \square$$

Primjedba 6 *Formula (38) se na isti način dokazuje za $\partial p(v)$, $v \in int\ \mathcal{V}$. To je uopštenje činjenice da izvod opadajuće funkcije jedne promjenljive nije pozitivan. U d) je data veza između važnih funkcija p i φ, iz koje se takođe vidi da je φ konkavna.*

USLOVI OPTIMALNOSTI

Prvo ćemo se baviti potrebnim uslovima za postojanje tačke minimuma funkcije f na skupu $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$.
Za konveksne funkcije smo imali da je nejednakost

$$\langle \nabla f(x^*), v\rangle \geqslant 0 \quad \text{za svaki dopustivi pravac } v \in \mathcal{V}(x^*, \mathcal{G})$$

potreban i dovoljan uslov za postojanje tačka minimuma x^*. Ovo znači da ako je x^* tačka minimuma, onda ne postoji dopustivi pravac v takav da vrijedi $\langle \nabla f(x^*), v\rangle < 0$. Bez konveksnosti uslov je potreban, stim da je tada minimum lokalni. Zaista, ako za neki v vrijedi

$$\langle \nabla f(x^*), v\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t} < 0,$$

onda imamo da je $f(x^* + tv) < f(x^*)$, za sve vrijednosti $t \in]0, t_0[$, odnosno, x^* nije tačka lokalnog minimuma funkcije f na $\mathcal{G}$.

Za ... bitno je to da u dopustive pravce tačke $x^* \in \mathcal{G} \cap \text{int}\ \mathcal{D}$ u odnosu na skup

$$\mathcal{G} = \{x \in \mathcal{D} : g_i(x) \leqslant 0, i \in \mathcal{J}\},$$

spadaju vektori v za koje

$$\langle \nabla g_i(x^*),\ v\rangle < 0 \text{ za svaki } i \in \mathcal{J}(x^*) = \{i \in \mathcal{J} : g_i(x^*) = 0\}.$$

Zaista, iz

$$\langle \nabla g_i(x^*), v\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{g_i(x^* + tv) - g_i(x^*)}{t},$$

za $i \in \mathcal{J}(x^*)$ izlazi

$$\lim_{t\to 0+} \frac{g_i(x^* + tv)}{t} < 0,$$

pa postoji $t_i > 0$ takav da je za sve $t \in]0, t_i[$

$$g_i(x^* + tv) < 0.$$

Zbog neprekidnosti funkcija isto vrijedi i za $i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}(x^*)$. Dakle, za sve $t \in]0, t_0[,\ t_0 = \min_{i\in\mathcal{J}} t_i$ i sve $i \in \mathcal{J}$ je $g_i(x^* + tv) \leqslant 0$.

Sada je jasno da, ako je x^* tačka lokalnog minimuma funkcije f na skupu $\mathcal{G}$, pri čemu je $\mathcal{D}$ otvoren, onda sistem nejednačina

$$\langle \nabla f(x^*),\ v\rangle < 0, \tag{43}$$

$$\langle \nabla g_i(x^*),\ v\rangle < 0,\ i \in \mathcal{J}(x^*) \tag{44}$$

nema rješenje na $\mathcal{G}$.
Sada možemo dokazati dvije osnovne teoreme optimalnosti. Označimo sa $\mathrm{G}(x)$ Jakobijevu matricu u x diferencijabilne funkcije $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Teorema 32 (F. Džon, 1948) *Neka su f, g diferencijabilne i neka je x^* tačka lokalnog minimuma funkcije f na skupu $\mathcal{G}$. Tada postoje $y^* \in \mathbb{R}^m, y_0^* \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi:*

$$(y_0^*, y^*) \geqslant \mathbf{0}, \quad (y_0^*, y^*) \neq \mathbf{0}, \tag{45}$$

$$y_0^* \nabla f(x) + \mathrm{G}^\top(x^*) y^* = \mathbf{0}, \tag{46}$$

$$\langle y^*, g(x^*)\rangle = 0. \tag{47}$$

Dokaz. Ako je $\mathcal{J}(x^*) = \varnothing$, onda je $x^* \in \mathrm{int}\mathcal{G}$, tako da je $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$, i dovoljno je uzeti $y_0^* = 1, y^* = \mathbf{0}$. U suprotnom, neka je A matrica čije vrste su vektori $\nabla f(x^*),\ \nabla g_i(x^*)$, pri $i \in \mathcal{J}(x^*)$. Ako je x^* tačka lokalnog minimuma funkcije f na skupu $\mathcal{G}$, onda sistem nejednačina (44)

$$\langle \nabla f(x^*),\ v\rangle < 0,$$

$$\langle \nabla g_i(x^*),\ v\rangle < 0,\ i \in \mathcal{J}(x^*) \tag{48}$$

odnosno sistem

$$Av < \mathbf{0}$$

nema rješenja. Sada, prema Gordan-Štimkeovoj teoremi, postoji vektor

$$(y_0^*, z^*) \geqslant \mathbf{0}, \quad (y_0^*, z^*) \neq \mathbf{0}$$

takav da je

$$A \begin{pmatrix} y_0^* \\ z^* \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Formirajmo novi vektor y^* stavljajući da je $y_i^* = z_i^*$ za $i \in \mathcal{J}(x^*)$, a $y_i^* = 0$ za $i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}(x^*)$. Sada prethodna jednakost postaje

$$\big(\nabla f(x^*),\ \mathrm{G}^\top(x^*)\big) \cdot \begin{pmatrix} y_0^* \\ y^* \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

odnosno

$$y_0^* \nabla f(x) + \mathrm{G}^\top(x^*) y^* = \mathbf{0}.$$

Uslov (48) je ispunjen pošto je $y_i^* = 0$ ili $g_i(x^*) = 0$. $\square$

Međutim, F. Džonova teorma nema veliku praktičnu vrijednost. Preciznije, u situaciji da sistem

$$\mathrm{G}^\top(x^*) y = \mathbf{0},\ y \geqslant \mathbf{0}$$

ima netrivijalno rješenje, možemo uzeti da je $y_0^* = 0$, pa funkcija f ne sudjeluje u ovim uslovima za postojanje svog ekstrema. Prema tome, potrebno je obezbjediti dodatni uslov da bude ispunjeno

$$y_0^* > 0.$$

Takvi uslovi nazivaju se uslovi regularnosti. a jedan takav je Mangasarijan-Fromovicev uslov: Sistem (36) ima rješenje, tj.

$$\exists\ v \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla g_i(x^*), v\rangle < 0,\ \forall i \in \mathcal{J}(x^*). \tag{49}$$

Teorema 33 (Karuš 1939, Kun, Taker 1951) *Neka su funkcije* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g = (g_1, ..., g_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferencijabilne u tački* x^* *lokalnog minimuma funcije* f *na skupu* $\mathcal{G}$, *i neka je ispunjen Mangasarjan- Fromovicev uslov. Tada postoji tačka* $y^* \in \mathbb{R}^n_+$ *takva da vrijedi*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} y_i^* \nabla g_i(x^*) = \mathbf{0}, \tag{50}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* g_i(x^*) = 0. \tag{51}$$

Dokaz. Ispunjeni su uslovi Džonove teoreme, a uslov (37) se svodi na

$$y_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{J}(x^*)} y_i^* \nabla g_i(x^*) = \mathbf{0}. \tag{52}$$

Neka je v vektor iz (37). Nakon skalarnog množenja dobijamo

$$y_0^* \langle \nabla f(x^*),\ v\rangle + \sum_{i \in \mathcal{J}(x^*)} y_i^* \langle \nabla g_i(x^*),\ v\rangle = 0,$$

Ako je $y^* = \mathbf{0}$, onda je $y_0^* > 0$, zbog $(y_0^*, y^*) \geqslant \mathbf{0}$, i $(y_0^*, y^*) \neq \mathbf{0}$. Ako je $y^* \neq \mathbf{0}$, zbog Mangasarijan-Fromovicevog uslova, drugi sabirak je negativan, odakle slijedi

$$y_0^* \langle \nabla f(x^*),\ v\rangle > 0,$$

što opet daje $y_0^* > 0$. Nakon dijeljenja sa y_0^* dobijemo (51). $\square$

Uočimo da za konkavnu (specijalno afinu) funkciju g_i uslov $\langle \nabla g_i(x^*),\ v\rangle < 0$ može da se zamijeni sa $\langle \nabla g_i(x^*),\ v\rangle \leqslant 0$, budući da je za sve $t > 0$

$$g_i(x^* + tv) \leqslant g_i(x^*) + t\langle \nabla g_i(x^*),\ v\rangle \leqslant 0$$

Sada uslov (44) možemo i precizirati: Ako je x^* tačka lokalnog minimuma funkcije f na $\mathcal{G}$, onda nema rješenja sistem

$$\begin{gathered} \langle \nabla f(x^*),\ v\rangle < 0, \\ \langle \nabla g_i(x^*), v\rangle \leqslant 0,\ i \in \mathcal{J}_K(x^*) = \{i \in \mathcal{J}(x^*) : g_i \text{ je konkavna}\}, \\ \langle \nabla g_i(x^*), v\rangle < 0,\ i \in \mathcal{J}(x^*) \setminus \mathcal{J}_K(x^*). \end{gathered} \tag{53}$$

Kao što smo koristili Mangasarijan-Fromovicev uslov koristiti tzv. AHU uslov regularnosti (Erou, Hurvic, Uzava): Postoji $v \in \mathbb{R}^n$ takav da za nekonkavne $g_i,\ i \in \mathcal{J}(x^*)$ vrijedi

$$\langle \nabla g_i(x^*), v \rangle < 0,$$

dok za konkavna aktivna ograničenja u x^* je

$$\langle \nabla g_i(x^*), v \rangle \leqslant 0.$$

Tada postupamo na sljedeći način. Uzmimo da matrica A kao vrste ima $\nabla f(x^*)$, $\nabla g_i(x^*), i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_K$, a B $\nabla g_i(x^*), i \in \mathcal{J}_K$. Tada se iz

$$y_0^* \langle \nabla f(x^*),\ v \rangle + \sum_{i \in \mathcal{J}(x^*) \setminus \mathcal{J}_K(x^*)} y_i^* \langle \nabla g_i(x^*),\ v \rangle + \sum_{i \in \mathcal{J}_K(x^*)} y_i^* \langle \nabla g_i(x^*),\ v \rangle = 0,$$

ako bi bilo $y_0^* = 0$ dobija jednačina po v koja nema rješenje, zbog AHU uslova i Mockinove teoreme alternative.

Da bismo se lakše izražavali uvedimo sljedeće pojmove. Svako rješenje po (x, y) sistema:

$$g(x) \leqslant \mathbf{0}, \quad y \geqslant \mathbf{0}, \tag{54}$$

$$\nabla f(x) + \mathrm{G}^\top(x) y = \mathbf{0}, \tag{55}$$

$$y^\top g(x) = 0, \tag{56}$$

zvaćemo KKT tačka problema minimizacije $(\mathcal{P})$, a navedene uslove KKT uslovi. Dakle, prema prethodnoj teoremi, uz uslov MF ili AHU, KKT uslovi su potrebni za postojanje lokalnog rješenja problema (NP).

Primjer 28 *Rješenje problema minimizacije funkcije* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2, \quad \text{na skupu } \mathcal{G} = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1^3 + x_2^2 \leqslant 0\}$$

očigledno je $x^* = (0, 0)$, *ali uslov (55) postaje*

$$2e^1 + y \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

pa x^* *nije KKT tačka. Uočimo da Erou-Hurvic-Uzavin uslov nije ispunjen, pošto* $g(x) = -x_1^3 + x_2^2$ *nije konkavna , a* $\nabla g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Primjer 29 *Posmatrajmo opšti zadatak linearnog programiranja:*

$$\min\{\langle c, x \rangle : \mathrm{A}x \geqslant b\}.$$

Stavimo $f(x) = \langle c, x \rangle$ *i* $g(x) = b - \mathrm{A}x$. *Ako je* $\mathcal{G} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leqslant \mathbf{0}\}$ *neprazan, onda je ispunjen AHU uslov regularnosti u svakoj dopustivoj tački. Kako je*

$$\nabla f(x) = c,\ G(x) = -\mathrm{A},$$

KKT uslovi postaju:

$$\begin{gathered} \mathrm{A}x \geqslant b, u \geqslant \mathbf{0}, \\ c - \mathrm{A}^\top u = \mathbf{0} \\ \langle u,\ b - \mathrm{A}x\rangle = 0. \end{gathered}$$

Treći uslov $\langle b, u\rangle = \langle u, \mathrm{A}x\rangle$ *zbog* $\langle u, \mathrm{A}x\rangle = \langle \mathrm{A}^\top u, x\rangle$, *uz drugi uslov je ekvivalentan sa*

$$\langle b, u\rangle = \langle c, x\rangle.$$

Dakle, ako je x^* *rješenje osnovnog problema linearnog programiranja, onda postoji* $u^* \geqslant \mathbf{0}$ *takav da vrijedi* $c = \mathrm{A}^\top u^*$ *i*

$$\langle u^*, b - \mathrm{A}x^*\rangle = 0 \tag{57}$$

Naravno, prethodni uslov se može zamijeniti sa

$$\langle b, u^*\rangle = \langle c, x^*\rangle. \tag{58}$$

Za kanonski zadatak linearnog programiranja

$$\min\{\langle c, x\rangle : \mathrm{A}x \geqslant b,\ x \geqslant \mathbf{0}\}.$$

imamo

$$f(x) = \langle c, x\rangle,\ g(x) = \begin{pmatrix} b - \mathrm{A}x \\ -x \end{pmatrix},\ \nabla f(x) = c,\ G(x) = -\begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{I} \end{pmatrix},$$

tako da su KKT uslovi :

$$\begin{gathered} \mathrm{A}x \geqslant b, x \geqslant \mathbf{0}, u \geqslant \mathbf{0}, v \geqslant \mathbf{0} \\ c - (\mathrm{A}^\top, \mathrm{I})\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ \left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b - \mathrm{A}x \\ -x \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \end{gathered}$$

Drugi i treći uslov su

$$c - \mathrm{A}^\top u = v,$$

$$\langle u, b - \mathrm{A}x\rangle = \langle v, x\rangle,$$

pa eliminacijom vektora v dobijamo:

$$\begin{gathered} \mathrm{A}x \geqslant b, x \geqslant \mathbf{0}, u \geqslant \mathbf{0}, \\ c \geqslant \mathrm{A}^\top u \\ \langle u, b - \mathrm{A}x\rangle = \left\langle x, c - \mathrm{A}^\top u \right\rangle. \end{gathered}$$

Jasno, posljednja jednačina je ekvivalentna sa $\langle b, u\rangle = \langle c, x\rangle$, a može se uz prethodne uslove i precizirati. Naime, zbog $x \geqslant \mathbf{0}$, $\mathrm{A}^\top y \leqslant c$ vrijedi $\langle u, \mathrm{A}x\rangle =$

$\left\langle \mathrm{A}^\top u, x\right\rangle \leqslant \langle c, x\rangle = \langle u, b\rangle$, odakle je $\langle u, b - \mathrm{A}x\rangle \geqslant 0$. Kako je obratna nejednakost očigledna dobijamo jednakost, a samim tim i potreban uslov

$$\langle u, b - \mathrm{A}x\rangle = 0, \quad \left\langle x, c - \mathrm{A}^\top u\right\rangle = 0. \tag{59}$$

Dovoljni uslovi optimalnosti

Jedan od osnovnih rezultata u konveksnoj optimizaciji je da su KKT uslovi dovoljni za potojanje optimalnog rješenja. Preciznije, vrijedi

Teorema 34 *Neka su f i g konveksne funkcije, diferencijabilne u $x^0 \in \mathcal{G}$. Ako postoji $y^0 \in \mathbb{R}^m$ takav da je (x^0, y^0) KKT tačka, onda je x^0 tačka globalnog minimuma funkcije f na skupu $\mathcal{G}$.*

Dokaz. Prvo, neka je $\mathcal{J}(x^0) = \varnothing$ tj. $g(x^0) < \mathbf{0}$. Pošto je još $y^0 \geqslant \mathbf{0}$, i $\langle y^0, g(x^0)\rangle = 0$, mora da bude $y^0 = \mathbf{0}$. Sada jednakost (42) postaje $\nabla f(x^0) = \mathbf{0}$. Zbog konveksnosti funkcije f, za sve $x \in \mathcal{G}$ imamo

$$f(x) - f(x^0) \geqslant \langle \nabla f(x^0), x - x^0\rangle = 0.$$

Ukoliko je $\mathcal{J}(x^0) \neq \varnothing$, to za proizvoljan $x \in \mathcal{G}$ i sve $i \in \mathcal{J}(x^0)$ vrijedi

$$g_i(x) \leqslant 0 = g_i(x^0),$$

pa je, zbog konveksnosti funkcija g_i, $\langle \nabla g_i(x^0), x - x^0\rangle \leqslant 0$. Sada iz (42) izlazi

$$\langle \nabla f(x^0), x - x^0\rangle = -\sum_{i \in \mathcal{J}(x^0)} y_i^0 \langle \nabla g_i(x^0), x - x^0\rangle \geqslant 0,$$

odakle je

$$f(x) \geqslant f(x^0), \text{ za sve } x \in \mathcal{G},$$

opet zbog konveksnosti. □

Primjer 30 *Sada vidimo da su potrebni uslovi za postojanje rješenja opšteg zadatka LP i dovoljni, s obzirom da su afine funkcije konveksne. Dakle, x^* takav da je $\mathrm{A}x^* \geqslant b$ je rješenje datog problema ako postoji $u^* \geqslant \mathbf{0}$ takav da je*

$$c = \mathrm{A}^\top u^*, \quad \langle u^*, b - \mathrm{A}x^*\rangle = 0.$$

Ovo je lako i direktno dokazati. Prvo, neposredno slijedi da je $\langle b, u^*\rangle = \langle c, x^*\rangle$. Sada, za svaki dopustivi vektor x, zbog $\mathrm{A}x \geqslant b$ i $u^* \geqslant \mathbf{0}$ imamo $\langle b, u^*\rangle \leqslant \langle \mathrm{A}x, u^*\rangle$. Odavde, za sve dopustive x je $\langle c, x^*\rangle \leqslant \langle c, x\rangle$:

$$\langle c, x^*\rangle = \langle b, u^*\rangle \leqslant \langle \mathrm{A}x, u^*\rangle = \left\langle x, \mathrm{A}^\top u^*\right\rangle = \langle c, x\rangle .$$

Spajajanjem prethodne dvije teoreme potreban i dovoljan kriterijum optimalnosti u konveksnom programiranju. Međutim, za ovaj problem se koristi Slejterov uslov regularnosti koji je ekvivalentan sa MF uslovom:

$$(\exists\, x^0 \in \mathcal{C})\ g(x^0) < \mathbf{0}. \tag{60}$$

Inače, kaže se i da je skup $\mathcal{G}$ regularan po Slejteru.

Teorema 35 (Kun, Taker) *Neka su konveksne funkcije f i $g_i (i \in \mathcal{J})$ diferencijabilne u $x^* \in \mathcal{G}$, i neka je skup $\mathcal{G}$ regularan po Slejteru. Tada je x^* rješenje problema* (KP) *ako i samo ako postoji y^* takav da je (x^*, y^*) njegova KKT tačka.*

`Dokaz`. Dovoljno je dokazati da S uslov povlači MF uslov. Neka postoji $x^0 \in \mathcal{C}$ takav da je $g(x^0) < \mathbf{0}$. Tada, za x^* i sve $i \in \mathcal{J}(x^*)$, zbog konveksnosti, imamo

$$\left\langle \nabla g_i(x^*), x^0 - x^* \right\rangle \leqslant g_i(x^0) - g_i(x^*) = g_i(x^0) < 0,$$

pa u (49) uzimamo $v = x^0 - x^*$. □

Primjedba 7 *Da MF uslov povlači S uslov, tj.* $\{v : \langle \nabla g_i(x^*), v\rangle < 0, i \in \mathcal{J}(x^*)\} \neq \varnothing \implies \{x : g(x) < \mathbf{0}\} \neq \varnothing$ *vidjeli smo u uvodnom dijelu ovog poglavlja, i to bez konveksnosti. Istaknimo još da u Slejterovom uslovu ne figuriše rješenje problema, kao što je u MF uslovu, pa je njegova upotreba jednostavnija. S druge strane situacija je olakšana tim što je dovoljno naći, za svaki $i \in \mathcal{J}$, tačku $x^i \in \mathcal{G}$ takvu da je $g_i(x^i) < 0$. Tada je Slejterov uslov ispunjen za njihovu konveksnu kombinaciju $x^0 = \frac{x^1+\ldots+x^m}{m}$, budući da zbog konveksnosti svake od funkcija g_i imamo: $g_i(x^0) \leqslant \frac{g_i(x^1)+\ldots+g_i(x^m)}{m} \leqslant \frac{g_i(x^i)}{m} < 0$.*

Primjer 31 *Naći minimum funkcije $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$*

$$f(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\,x_1 - 2\,x_2}{x_1\, +\, x_2},$$

pri uslovima: $x_1 + x_2 \geqslant 1,\ 2x_1 + 3\,x_2 \leqslant 6$

Rješenje.
Neka je $g_1(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 + 1,\ g_2(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - 6,\ g_3(x_1, x_2) = -x_1,\ g_4(x_1, x_2) = -x_2$ i

$$\mathcal{G} = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_1(x_1, x_2) \leqslant 0, g_2(x_1, x_2) \leqslant 0, g_3(x_1, x_2) \leqslant 0, g_4(x_1, x_2) \leqslant 0\}.$$

Imamo: $f(x) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} - 2, \quad \nabla f(x) = \mathbf{1} - \dfrac{2}{(x_1 + x_2)^2} \begin{pmatrix} x_2^2 \\ x_1^2 \end{pmatrix},$

$$\nabla^2 f(x) = \frac{4}{(x_1 + x_2)^3} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} (x_2, -x_1)\,.$$

pa vidimo da je

$$\langle \nabla^2 f(x)v, v\rangle = \frac{4}{(x_1+x_2)^3}(x_1v_2 - x_2v_1)^2 \geqslant 0$$

na skupu

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_2 > -x_1\} \supset \mathcal{G}.$$

Dakle, $f, g_1, ..., g_4$ su konveksne funkcije i ispunjen je Slejterov uslov (dovoljno je uzeti tačku $x^0 = (1,1)$), tako da su KKT uslovi potrebni i dovoljni za postojanje globalnog minimuma.
Kako jednačina $\nabla f(x) = \mathbf{0}$ nema rješenja to je $x^* \notin \operatorname{int} \mathcal{G}$, i $y \neq \mathbf{0}$
Vidimo da su uslovi sljedeći:

$$x \in \mathcal{G} \setminus \operatorname{int} \mathcal{G}, \ y \geqslant \mathbf{0}, \ y \neq \mathbf{0}$$

$$1 - 2\left(\frac{x_2}{x_1+x_2}\right)^2 - y_1 + 2y_2 - y_3 = 0, \quad 1 - 2\left(\frac{x_1}{x_1+x_2}\right)^2 - y_1 + 3y_2 - y_4 = 0,$$

$$y_1(-x_1 - x_2 + 1) = 0, \ y_2(2x_1 + 3x_2 - 6) = 0, \ y_3(-x_1) = 0, \ y_4(-x_2) = 0.$$

Prvo, $(x_1, 0)$ i $(0, x_2)$ nisu KKT tačke: Za $(x_1, 0)$ $1 \leqslant x_1 \leqslant 3$ je $y_3 = 0$, pa prva dva uslova su $y_1 - 2y_2 = 1$, $-y_1 + 3y_2 - y_4 = 1$, Zbog $y \geqslant \mathbf{0}$ ne može biti $y_1 = 0$, tako da je (treći uslov) $x_1 = 1$. Sada, iz navedenog uslova je $y_2 = 0$, i $1 = -y_1 - y_4 \leqslant 0$. Za $(0, x_2)$, $1 \leqslant x_2 \leqslant 2$ je $y_4 = 0$ i $y_1 = 3y_2 = 1$, $-y_1 + 2y_2 - y_3 = 1$. Vidimo da nije $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, odakle je $x_1 = 1$ i $x_1 = 2$. Kako navedene tačke nisu KKT mora biti $y_3 = y_4 = 0$, tako da zbog uslova $y \neq \mathbf{0}$ preostaje:

(a) $y_1 = 0, y_2 \neq 0$,
tj. $x_1 + x_2 = 1$, što sa $1 - 2\left(\frac{x_2}{x_1+x_2}\right)^2 = 2\left(\frac{x_1}{x_1+x_2}\right)^2$ daje $x_1 = \ x_2$.
Zaključujemo da je $x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, i $y^* = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$.

(b) $y_2 = 0$, $y_1 \neq 0$ ne treba analizirati, budući da ako x^* pripada duži $](3,0),(0,2)[$, onda optimalna tačka (zbog konveksnosti f-) postoji i u $\operatorname{int} \mathcal{G}$.

$\boxed{\text{slika}}$

Primjedba 8 (Uslovi regularnosti) *Kao prvo Mangasarijan-Fromovicev uslov može da se poveže sa sistemom jednačina. Na osnovu Gordon-Štimkeove teoreme alternative, taj uslov je ekvivalentan uslovu da sistem*

$$\sum_{i \in \mathcal{J}(x^*)} y_i \nabla g(x^*) = \mathbf{0}, \ \sum_{i \in \mathcal{J}(x^*)} y_i = 1, \ y_i \geqslant 0, i \in \mathcal{J}(x^*)$$

nema rješenje. To je sigurno ispunjeno ako je skup

$$\{\nabla g_i(x^*) : i \in \mathcal{J}(x^*)\}$$

linearno nezavisan. Ovaj novi uslov se naziva Hestenesov, i on dakle povlači Mangasarjan-Fromovicev uslov. Uslov regularnosti Erou-Hurvic-Uzave je ekvivalentan sa uopštenim Slejterovim uslovom: g_i *su konveksne i postoji* $x^0 \in \mathcal{C}$ *takav da je*

$$g_i(x^0) < 0 \ (g_i \ neafine), \ g_i(x^0) \leqslant 0 \ (g_i \ afine),$$

što se pokazuje kao i odnos između Slejterovog i Mangasarijan-Fromovicevog uslova.
U konveksnoj optimizaciji uslov:

$$\text{Ne postoji } p \geqslant \mathbf{0}, p \neq \mathbf{0}, \text{ takav da je za sve } x \in \mathcal{C} \text{ vrijedi } \langle p, \ g(x)\rangle \geqslant 0$$

je još jedan kome se ne nalazi rješenje problema. On je uslov regularnosti (Karlinov) zato što je ekvivalentan sa Slejterovim uslovom. Ta ekvivalentnost nije ništa drugo do Fan-Gliksberg-Hofmanova teorema.

Sedlaste tačke i optimalnost

Ako su funkcije f i g diferencijabilne na skupu $\mathcal{D}$ onda za Lagranžovu funkciju $L(x,y) = f(x) + \langle y, g(x)\rangle$ onda imamo

$$\nabla_x L(x,y) = \nabla f(x) + \langle y, \nabla g(x)\rangle,$$

$$\nabla_y L(x,y) = g(x).$$

Sada vidimo da je KKT tačka rješenje sistema

$$\nabla_x L(x,y) = \mathbf{0}, \tag{61}$$

$$\nabla_y L(x,y) = \mathbf{0}, \tag{62}$$

$$\langle y, g(x)\rangle = 0, \tag{63}$$

na skupu $\mathcal{D} \times \mathbb{R}^m_+$. Još jedna tačka vezana za Lagranžovu funkciju ima važnu ulogu u optimizaciji. To je sedlastu tačka, a definisaćemo je u opštem slučaju.

Definicija 8 *Tačka* $(x^0, y^0) \in X \times Y$ *zove se sedlasta tačka funkcije* $F : X \times Y \to \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ *ako za sve* $(x,y) \in X \times Y$ *vrijedi*

$$F(x^0, y) \leqslant F(x^0, y^0) \leqslant F(x, y^0). \tag{64}$$

Dakle, nas će zanimati sedlaste tačke Lagranžove funkcije, koje ćemo kraće zvati STL . U slučaju konveksnog programiranja, sa diferencijabilnim funkcijama f i g lako se dobije da ako je (x^*, y^*) KKT tačka, onda L ima sedlastu tačku. Zaista,

$$\mathcal{C} \ni x \mapsto L(x, y^*) = f(x) + \langle y^*, g(x) \rangle \in \mathbb{R}$$

je konveksna, pa vrijedi

$$L(x, y^*) - L(x^*, y^*) \geqslant \langle \nabla_x L(x^*, y^*), x - x^* \rangle.$$

KKT uslov (...) je $\nabla_x L(x^*, y^*) = \mathbf{0}$, tako da dobijamo, za sve $x \in \mathcal{C}$

$$L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*).$$

Sa druge strane, za sve $y \in \mathbb{R}^m_+$, očigledno je $\langle y, g(x^*) \rangle \leqslant \mathbf{0}$, a prema pretpostavci (62) imamo $\langle y^*, g(x^*) \rangle = \mathbf{0}$, tako da vrijedi

$$L(x^*, y) = f(x^*) + \langle y, g(x^*) \rangle \leqslant f(x^*) = L(x^*, y^*).$$

Povezujući ovaj zaključak sa teoremom 36. dobijamo potreban uslov za postojanje rješenja zadatka diferencijabilne konveksne minimizacije, pomoću sedlastih tačaka (Slejter, 1950). Mi ćemo do tog uslova doći bez zahtjeva da su f i g diferencijabilne. Vrijedi sljedeća teorema.

Teorema 36 *Neka su f i g_i, $i \in \mathcal{J}$ konveksne funkcije, skup $\mathcal{G}$ regularan po Slejteru i neka je x^* tačka minimuma funkije f na $\mathcal{G}$. Tada postoji $y^* \geqslant \mathbf{0}$ takva da je (x^*, y^*) sedlasta tačka funkcije L.*

Dokaz. Jasno je da vrijedi $\{x \in \mathcal{C} : g(x) < \mathbf{0},\ f(x) - f(x^*) < 0\} = \varnothing$. Prema Fan-Gliksberg-Hofmanovoj teoremi postoji vektor $(p, p_0) \gneqq \mathbf{0}$ takav da za sve $x \in \mathcal{C}$ vrijedi

$$\langle p, g(x) \rangle + p_0(f(x) - f(x^*)) \geqslant 0.$$

Odavde, za $x = x^*$ slijedi $\langle p, g(x^*) \rangle \geqslant 0$, pa zbog $p \geqslant \mathbf{0}$, $g(x^*) \leqslant \mathbf{0}$ tu je na snazi jednakost

$$\langle p, g(x^*) \rangle = 0.$$

Dalje, ako bi bilo $p_0 = 0$, onda ponovo koristeći teoremu Fan-Gliksberg-Hofmana imali bismo da je $\{x \in \mathcal{C} : g(x) < \mathbf{0}\} = \varnothing$. Zbog Slejterovog uslova ova skup je neprazan, pa nam preostaje $p_0 > 0$. Uzimajući da je $y^* = \frac{1}{p_0} p$, izlazi za sve $x \in \mathcal{C}$,

$$\langle y^*, g(x) \rangle + f(x) \geqslant f(x^*)),$$

što sa $\langle y^*, g(x^*) \rangle = 0$ znači $L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*)$. Sa druge strane, za sve $y \geqslant \mathbf{0}$, očigledno je $L(x^*, y^*) \leqslant L(x^*, y^*)$. □

Bez ikakvih posebnih uslova, iz postojanja sedlaste tačke slijedi rješivost problema minimizacije.

Teorema 37 *Ako Lagranžova funkcija L ima sedlastu tačku (x^*, y^*) na skupu $\mathcal{D} \times \mathbb{R}^m_+$, onda je x^* tačka globalnog minimuma funkcije f na $\mathcal{G}$.*

Dokaz. Neka je (x^*, y^*) sedlasta tačka funkcije L. Tada za sve $x \in \mathcal{D}$, $y \geqslant \mathbf{0}$ nejednakosti (...) postaju

$$f(x^*) + \langle y, g(x^*)\rangle \leqslant f(x^*) + \langle y^*, g(x^*)\rangle \leqslant f(x) + \langle y^*, g(x)\rangle. \tag{65}$$

Uzimajući u lijevoj nejednakosti $y = y^* + e^i, i \in \mathcal{J}$, dobijamo da je $\langle e^i,\ g(x^*)\rangle \leqslant 0$, za sve $i = 1, ..., m$, odakle je $g(x^*) \leqslant \mathbf{0}$, tj. $x^* \in \mathcal{G}$. Sada je

$$\langle y^*,\ g(x^*)\rangle \leqslant 0,$$

a pri $y = \mathbf{0}$ imamo $\langle y^*,\ g(x^*)\rangle \geqslant 0$. Slijedi $\langle y^*,\ g(x^*)\rangle = 0$, tako da desna nejednakost u (65) postaje

$$f(x^*) \leqslant f(x) + \langle y^*,\ g(x)\rangle.$$

Kako je $y^* \geqslant \mathbf{0}$, i $g(x) \leqslant \mathbf{0}$ na skupu $\mathcal{G}$, to je na njemu i $f(x^*) \leqslant f(x)$. $\square$

Primjedba 9 *Iz navedenih teorema izlaze i ostali odnosi. Tako npr. imamo da je (x^*, y^*) KKT tačka ako je, uz regularnost, tačka (x^*, y^*) STL. Osnovne veze date su*

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & \text{NP} & \\ \text{regularnost} \ \swarrow & & \nwarrow \\ & \longrightarrow & \\ \text{KKT} & \texttt{konveksnost} & \text{STL} \end{array}}$$

Primjer 32 *Riješiti problem*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \to \min$$

$$\mathcal{G} = \{x \in \operatorname{int} \mathbb{R}^3_+ : x_1 x_2 + x_1 x_3 \leqslant 1\}.$$

Rješenje. Za svaku tačku iz dopustivog skupa ispunjen je Hestensov, a time i Mangasarijan-Fromovicev uslov regularnosti. Jedina KKT tačka je

$$(x^*, u^*),\ x^* = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right),\ u^* = 2.$$

Ovdje ne možemo iskoristiti Kun Takerovu teoremu pošto f i g nisu konveksne funkcije: za $x^1 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, i $x^2 = (\frac{1}{2}, 1, 1)$ vrijedi $f(\frac{x^1+x^2}{2}) > \frac{f(x^1)+f(x^2)}{2}$, i $g(\frac{x^1+x^2}{2}) > \frac{g(x^1)+g(x^2)}{2}$. Skup $\mathcal{G}$ nije kompaktan, tako da ne možemo iskoristiti ni Vajerštrasovu teoremu o ekstremima.

$\boxed{\text{slika}}$

Provjerimo da li je (x^*, y^*) sedlasta tačka Lagranžove funkcije

$$L(x,y) = x_2x_3 + \frac{1}{x_1x_2x_3} + y(x_1x_2 + x_1x_3 - 1).$$

Nejednakost $L(x^*, y) \leqslant L(x^*, y^*)$ je trivijalna, dok se $L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*)$ svodi na

$$x_2x_3 + \frac{1}{x_1x_2x_3} + 2(x_1x_2 + x_1x_3 - 1) \geqslant 3,$$

odnosno na

$$2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 + \frac{1}{2x_1x_2x_3} + \frac{1}{2x_1x_2x_3} \geqslant 5.$$

Preostaje da se iskoristi nejednakost između aritmetičke igeometrijske sredine. Dakle, riječ je o sedlastoj tački, pa je x^* rješenje datog zadatka. $\square$

Sedlaste tačke i minimaks

Postojanje sedlaste tačke funkcije F neposredno povlači jednakost

$$\min_{x\in X} F(x, y^0) = \max_{y\in Y} F(x^0, y), \tag{66}$$

pri čemu su te vrijednosti jednake $F(x^0, y^0)$. Obratno, iz ove jednakosti izlazi da za sve $(x, y) \in X \times Y$ vrijedi

$$F(x^0, y) \leqslant \max_y F(x^0, y) = \min_x F(x, y^0) \leqslant F(x, y^0),$$

odakle, uzimajući $x = x^0, y = y^0$ slijedi $F(x^0, y^0) = \max_y F(x^0, y)$. Tako dobijamo nejednakosti (63) iz definicije sedlaste tačke.
Jednakost (65) navodi nas na pomisao da tada važi i jednakost

$$\min_{x\in X} \max_{y\in Y} F(x, y) = \max_{y\in Y} \min_{x\in X} F(x, y),$$

a da je zaista tako vidimo iz sljedeće teoreme.

Teorema 38 *Funkcija $F : X \times Y \to \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ ima sedlastu tačku na skupu $X \times Y$, ako i samo ako vrijedi*

$$\min_{x\in X} \max_{y\in Y} F(x, y) = \max_{y\in Y} \min_{x\in X} F(x, y). \tag{67}$$

Dokaz. Za sve $(x, y), (x^0, y^0) \in X \times Y$ vrijede nejednakosti

$$\sup_{y \in Y} F(x, y) \geqslant F(x, y) \geqslant \inf_{x \in X} F(x, y),$$

$$\inf_x \sup_y F(x, y) \geqslant \sup_y \inf_x F(x, y),$$

$$\sup_y F(x^0, y) \geqslant \inf_x \sup_y F(x, y) \geqslant \sup_y \inf_x F(x, y) \geqslant \inf_x F(x, y^0).$$

Ako F ima (x^0, y^0) za sedlastu tačku posljednje nejednakosti, uz (64), povlače

$$\inf_x \sup_y F(x, y) = \sup_y \inf_x F(x, y) \ (= F(x^0, y^0)).$$

Neka su sada, x^0 i y^0 tačke minimuma, odnosno maksimuma odgovarajućih funkcija iz (65). Vrijedi $\max_y F(x^0, y) = \min_x F(x, y^0)$, a to, kao što smo vidjeli, preko (64), znači da je (x^0, y^0) sedlasta tačka. □

Uslovi koji obezbjeđuju jednakost (65) sadržani su u teoremama o minimaksu. Prvu od njih, za standardne simplekse i bilinearnu funkciju $F(x, y) = x^\top \mathrm{A} y$, dokazao je von Nojman (1928), a potom je dao i njeno uopštenje 1937.

Teorema 39 *Neka je neprekidna funkcija $(x, y) \mapsto F(x, y)$ konveksna po $x \in X$, konkavna po $y \in Y$, pri čemu su ovi skupovi konveksni i kompaktni. Tada vrijedi*

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} F(x, y) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} F(x, y).$$

Dokaz. Označimo lijevu stranu minimaks jednakosti sa α, a desnu sa β. Zbog neprekidnosti i kompaktnosti ove vrijednosti postoje. Pokažimo da je $\alpha = \beta$. Jasno, iz $F(x, y) \geqslant \min_{x \in X} F(x, y)$, za sve $y \in Y$, slijedi

$$\max_{y \in Y} F(x, y) \geqslant \max_{y \in Y} \min_{x \in X} F(x, y) = \beta,$$

za sve $x \in X$, pa je

$$\alpha = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} F(x, y) \geqslant \beta.$$

Pretpostavimo da je $\alpha > \beta$, i definišimo funkcije

$$F_y : x \mapsto F(x, y),$$

za svaki $y \in Y$. Tada, zbog $\max_{y \in Y} F(x, y) \geqslant \alpha$ za sve $x \in X$, presjek svih nivoskih skupova lev $(F_y, \frac{\alpha+\beta}{2})$ je prazan. Zbog kompaktnosti skupa X i zatvorenosti nivoskih skupova postoji konačno vektora $y^1, ..., y^m$ tako da je

$$\bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{lev}\big(F_{y^i}, \frac{\alpha + \beta}{2}\big) = \varnothing.$$

Samim tim, uz oznaku $G = (F_{y^1} - \frac{\alpha+\beta}{2}, ..., F_{y^m} - \frac{\alpha+\beta}{2})^\top$ vrijedi

$$\{x \in X : G(x) < \mathbf{0}\} = \varnothing.$$

Sve komponentne funkcije su konveksne po pretpostavci, tako da po Fan Gliksberg Hofmanovoj teoremi postoji $p = (p_1, ..., p_m) \gneq \mathbf{0}$ takav da za sve $x \in X$ je

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \left(F\left(x, y^i\right) - \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \geqslant 0.$$

Stavljajući da je $\lambda_i = \frac{p_i}{p_1+...+p_m}$, iz konkavnosti polazne funkcije po y, za sve $x \in X$ slijedi

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F(x, y^i) \leqslant F\left(x, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y^i\right).$$

Odavde je

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant \min_{x \in X} F\left(x, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y^i\right) \leqslant \max_{y \in Y} \min_{x \in X} F(x, y) = \beta,$$

odnosno $\alpha \leqslant \beta$. To je u suprotnosti sa pretpostavkom $\alpha > \beta$, pa nam preostaje jednakost. $\square$

DUALNOST

U teoriji dualnosti se osnovnom (polaznom problemu) dodjeljuje sličan problem, takav da su im rješenja u bliskoj vezi. U matematičkom programiranju dati problem minimizacije naziva se primalan (P), a pridružuje mu se dualan problem (D). Teoreme dualnosti govore o odnosu rješivosti tih problema, kao i o vezi između rješenja. U određenim slučajevima za rješavanje može se izabrati jenostavniji od ta dva problema. Dualnost u linearnom programiranju dobićemo kao specialan slučaj. Za sada navedimo da za osnovni problem (LP)

$$\min\ c^\top x$$

$$\mathrm{A}x \geqslant b,$$

dualan je problem

$$\max\ y^\top b$$

$$\mathrm{A}^\top y = c, \quad y \geqslant \mathbf{0},$$

što se ... I u opštem slučaju, zadatku minimizacije funkcije f na dopustivom skupu $\mathcal{G}$ biće problem maksimizacije u kome sudjeluju f i g.

Vulfova i Lagranžova dualnost

1. Jedan od pristupa sastoji se u sljedećem. Za primalan problem (P):

$$\min\{f(x) : x \in \mathcal{G}\}, \quad \mathcal{G} = \{x \in \mathcal{C} : g(x) \leqslant \mathbf{0}\}$$

neka je $\varnothing \neq \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$, konveksan skup i $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R},\ g : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^m$. konveksne funkcije. Restrikcija

$$\mathcal{C} \ni x \mapsto L(x,u) \in \mathbb{R},$$

Lagranžove funkcije $L : \mathcal{C} \times \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$L(x,u) = f(x) + \langle u,\ g(x)\rangle.$$

je konveksna na $\mathcal{C}$ za svaki (fiksiran) vektor $u \geqslant \mathbf{0}$. Ako su date funkcije još i diferencijabilne, dobijamo da na skupu $\mathcal{C}$ vrijedi

$$L(x,u) \geqslant L(y,u) + \langle \nabla_x L(y,u), x - y\rangle.$$

S druge strane, kako za sve $x \in \mathcal{G}$ i $u \geqslant \mathbf{0}$ vrijedi $\langle u, g(x)\rangle \leqslant 0$ imamo

$$L(x,u) \leqslant f(x).$$

Iz ovih nejednakosti, za sve $x \in \mathcal{G}, y \in \mathcal{C}, u \geqslant \mathbf{0}$, dobijamo

$$f(x) \geqslant L(y,u) + \langle \nabla_x L(y,u), x - y \rangle.$$

Prema tome, za sve $y \in \mathcal{C}$, $u \geqslant \mathbf{0}$ za koje je

$$\nabla_x L(y,u) = \mathbf{0}$$

vrijedi

$$f(x) \geqslant L(y,u).$$

Sada možemo vidjeti da je prirodno problemu (P) dodijeliti problem :

$$\max L(y,u), \tag{68}$$

$$\nabla_x L(y,u) = \mathbf{0},\ y \in \mathcal{C},\ u \geqslant \mathbf{0}, \tag{69}$$

kojeg ćemo zvati dualan, a označati sa (D). Jasno, umjesto min u (P) i max u (D) možemo staviti inf, odnosno sup. Ovo je Vulfov pristup u Teoriji dualnosti konveksnog programiranja.

2. U opštem slučaju, tj. bez uslova konveksnosti i diferencijabilnosti možemo postupiti na sljedeći način. Kako za sve $x \in \mathcal{G}$ i $u \geqslant \mathbf{0}$ vrijedi

$$L(x,u) \leqslant f(x),$$

slijedi

$$\inf_{x \in \mathcal{G}} L(x,u) \leqslant f(x).$$

Uvodeći u gornju nejednekost funkciju φ (Primjer 24)

$$\varphi(u) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x,u) \quad u \geqslant 0,$$

i imajući na umu da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}$, dobijamo da za sve $x \in \mathcal{G}$, i sve $u \geqslant \mathbf{0}$ vrijedi

$$\varphi(u) \leqslant f(x). \tag{70}$$

Problemu (P) dodjeljujemo dualan problem (D):

$$\sup\ \varphi(u), \quad u \in \mathbb{R}^m_+.$$

Ponekad se funkcija φ naziva Lagranžijan, a (D) Lagranžov dualan problem.

Marginalna funkcija i dualnost

Do pojma Lagranžove dualnosti možemo doći i na drugi način. Neka je p marginalna funkcija problema (P), koja ima konjugovanu funkciju. Iz Fenhel-Jangove nejednakosti

$$p(\mathbf{0}) + p^*(-u) \geqslant \langle \mathbf{0}, -u \rangle,$$

imamo $p(\mathbf{0}) \geqslant -p^*(-u)$. Sada je, prema Primjeru 25-d,

$$p(\mathbf{0}) \geqslant \varphi(u), \quad u \geqslant \mathbf{0},$$

odakle izlazi

$$p(\mathbf{0}) \geqslant \sup_{u \geqslant \mathbf{0}} \varphi(u),$$

tj.

$$\inf_{g(x) \leqslant \mathbf{0}} f(x) \geqslant \sup_{u \geqslant \mathbf{0}} \varphi(u). \tag{71}$$

Primjedba 10 *(D) možemo zapisati i u obliku*

$$-\inf\ -\varphi(u), \quad u \in \mathbb{R}^m_+.$$

pa kako znamo da je funkcija $-\varphi$ konveksna, vidimo da svakom primalnom problemu (P) dodjeljujemo konveksan dualan problem. To ne mora biti slučaj za Vulfovu dualnost, zato što skup rješenja jednačine (62) ne mora biti konveksan.

Označimo optimalne vrijednosti problema (P), i (D) sa π i δ. Ako je $\mathcal{G} = \varnothing$ stavljamo $\pi = +\infty$. Osnovni cilj teorije dualnosti je određivanje uslova pod kojima vrijedi

$$\pi = \delta,$$

kao i izučavanje veze između rješivosti primalnog i dualnog problema. Nejednakost (71)je, u stvari,

$$\pi \geqslant \delta,$$

a lako se dokazuje i bez pozivanja na konjugovane funkcije. U suštini u prethodnom razmatranju je sadržana teorema slabe dualnosti.

Teorema 40 ***Za svaki*** $(x^0, u^0) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R}^m_+$ ***vrijedi*** $f(x^0) \geqslant \varphi(u^0)$. ***Pri tome je*** $\pi \geqslant \delta$.

Dokaz. Prvi dio je nejednakost (63). Sada, pošto je $x^0 \in \mathcal{G}$ proizvoljna tačka, vidimo da je f odozdo ograničena sa $\varphi(u^0)$, te je onda $\varphi(u^0) \leqslant \pi$, i to za sve $u^0 \geqslant \mathbf{0}$. Znači, $\delta \leqslant \pi$. $\square$

Jednakost optimalnih vrijednosti povezana je sa svojstvima marginalne funkcije (Primjer 25).

Teorema 41 $\quad \pi = \delta \iff p(\mathbf{0}) = p^{**}(\mathbf{0})$.

Dokaz. Iz (40) tj. $\varphi(u) = -p^*(-u),\ u \geqslant \mathbf{0}$, slijedi

$$\sup_{u \geqslant \mathbf{0}} \varphi(u) = \sup_{-u \in dom(p^*)} -p^*(-u),$$

odakle je

$$\delta = \sup_{u \geqslant \mathbf{0}} \varphi(u) = \sup_{-u \in dom(p^*)} (\langle -\mathbf{u},\ \mathbf{0}\rangle - p^*(-u)) = p^{**}(\mathbf{0}).$$

Uz ovo je $\pi = p(\mathbf{0})$, tako da je gornja ekvivalencija jasna. □

Primjedba 11 *U slučaju konveksnosti marginalne funkcije, saglasno Teoremi Fenhel-Moro možemo reći da je $\pi = \delta$ ako i samo ako je p odozdo poluneprekidna (zatvorena) u $\mathbf{0}$. Tada se za problem (P) kaže da je normalan.*

Isto tako bitna je i nepraznost subdiferencijala marginalne funkcije u $\mathbf{0}$, što vidimo iz

Teorema 42 $\quad \partial p(\mathbf{0}) \neq \varnothing \implies \pi = \delta$.

Dokaz. Zaista, neka je $-u^0 \in \partial p(\mathbf{0})$. Tada je, prema teoremi 31. i (42),

$$\pi = p(\mathbf{0}) = -p^*(-u^0) = \varphi(u^0) \leqslant \delta.$$

Sada, zbog $\pi \geqslant \delta$ izlazi jednakost. □

Nepraznost subdiferencijala se posebno ističe tako što se kaže da je (P) stabilan ako za njegovu marginalnu funkciju vrijedi

$$\partial p(\mathbf{0}) \neq \varnothing.$$

Za definiciju stabilnosti uzima se i neko od tvrđenja koje je ekvivalentno nepraznosti subdiferencijala marginalne funkcije u $\mathbf{0}$ (...)

Teoreme dualnosti

Veze između rješivosti primalnog i odgovarajućeg dualnog problema, kao i veze među rješenjima tih problema date su teoremama dulnosti.

Teorema 43 (Jake dualnosti) *Neka je $p(\mathbf{0})$ konačan. Tada dualan problem* (D) *ima rješenje u^* i $\pi = \delta$ ako i samo ako vrijedi*

$$-u^* \in \partial p(\mathbf{0}).$$

Dokaz. Kako je $p(\mathbf{0})$ konačan, na osnovu Teoreme 31 (formula (30)), i Primjera 25 (jednakost (40)) imamo

$$-u^* \in \partial p(\mathbf{0}) \Longleftrightarrow \pi = \varphi(u^*).$$

Sada, ako je $\pi = \delta$ i ako je u^* rješenje problema (D) slijedi $\pi = \varphi(u^*)$, a to povlači $-u^* \in \partial p(\mathbf{0})$,
Obratno, iz $-u^* \in \partial p(\mathbf{0})$ izlazi $\pi = \varphi(u^*)$ i $\pi = \delta$ (Teorema 46). Dakle, $\delta = \varphi(u^*)$, odnosno $\max\limits_{u \geqslant \mathbf{0}} \varphi(u) = \varphi(u^*)$, tako da je u^* rješenje problema (D) i $\pi = \delta$. $\square$

Primjedba 12 *Sta uočavamo*

Primjedba 13 *Uslov $\pi > -\infty$ je prirodan, s obzirom da je u suprotnom, zbog nejednakosti, $\pi \geqslant \delta$ i $\delta = -\infty = \varphi(u)$ za sve $u \geqslant \mathbf{0}$ (slaba dualnost), što je trivijalno.*

Ilustrujmo prethodnu teoremu jednim primjerom.

Primjer 33 (Dafin,19) *Za problem minimizacije*

$$f(x_1, x_2) = e^{-x_2}$$

$$g(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1 \leqslant 0$$

odrediti marginalnu funkciju i ispitati stabilnost.

$$p(v) = \inf_{(x_1,x_2)\in\mathcal{G}(v)} e^{-x_2}, \ v \in \mathbb{R}.$$

Dopustivi skup

$$\mathcal{G}(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1 \leqslant v \right\}$$

je prazan za $v < 0$, pa je $p(v) = +\infty$. Za $v = 0$ vrijedi $\mathcal{G}(v) = \{(x_1, 0) \ : x_1 \geqslant 0\}$, i $p(0) = 1$. U slučaju da je $v > 0$, imamo da je $(\frac{n^2}{2v}, n) \in \mathcal{G}(v)$, tako da $e^{-n} \to 0$. Zbog $f(x) > 0$ slijedi $p(v) = 0$. Dakle, $\mathcal{D}(p) = [0, +\infty[$,

$$p(v) = \begin{cases} 1, & v = 0 \\ 0, & v > 0. \end{cases}$$

Ovdje je $\pi = p(\mathbf{0}) = 1$ i $x^* = (0,0)$ (štavise skup rješenja je $\mathcal{G}$). Jasno, $\partial p(0) = \varnothing$ (Primjer 16.), te problem nije stabilan. I pored toga dualan problem ima rješenje. Kako je

$$\sup_{v\in V}(uv - p(v)) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0 \\ +\infty, & y > 0, \end{cases}$$

dobijamo $\mathcal{D}(p^c) =]-\infty, 0]$, $p^c(u) = 0$, tako da je $\varphi(u) = 0, u \geqslant 0$. Rješenje u^* je svaki nenegativan broj, ali ovdje imamo $\pi > \delta$. $\square$

slika 12

Primjer 34 *Za problem minimizacije u kome je $\mathcal{C} = \mathbb{R}$*

$$f(x) = e^{-x}, \quad g(x) = -x,$$

je $\pi = 0$, dok x^* ne postoji. Ovdje je $p \equiv 0$, $\partial p(0) = \{0\}$. Funkija φ definisana je jedinu u 0, pri čemu je $\varphi(0) = 0$. Dualan problem ima rješenje $u^* = 0$, i $\delta = 0$ $\square$

Dakle iz teoreme jake dualnosti ne slijedi postojanje rješenja primalnog problema. Prije nego što damo uslove koji to obezbjeđuju uočimo da ako pored dualnog rješenje ima i primalan zadatak onda uslov $\pi = \delta$ glasi $f(x^*) = \varphi(u^*)$, tako da, zbog

$$f(x^*) = \varphi(u^*) = \inf_x L(x, u^*) \leqslant L(x^*, u^*) \leqslant f(x^*),$$

vrijedi

$$\varphi(u^*) = L(x^*, u^*), \tag{72}$$

kao i uslov komplementarnosti

$$\langle g(x^*), u^* \rangle = 0. \tag{73}$$

Obratna teorema dualnosti govori o rješivosti primalnog problema, kada dualan ima rješenje.

Teorema 44 (Inverzne dualnosti) *Neka je u^* rješenje problema (D) i $\pi = \varphi(u^*)$. Tada je tačka $x^* \in \mathcal{G}$ rješenje problema (P), ako i samo ako vrijede jednakost (64) i (65).*

Dokaz. S obzirom na gore rečeno preostaje da se dokaže drugi dio tvrđenja. Tri jednakosti iz teoreme, tj.

$$\pi = \varphi(u^*) = L(x^*, u^*) = f(x^*) + \langle u^*, g(x^*) \rangle = f(x^*).$$

znače

$$f(x^*) = \inf_{x \in \mathcal{G}} f(x). \quad \square$$

Primjedba 14 *U prethodnom primjeru su ispunjeni uslovi Teoreme 48. osim (64):*

$$\varphi(0) = 0 \neq L(x, 0) = e^{-x}.$$

Stabilnost i uslovi regularnosti

Teoreme dualnosti su, u suštini, teorijskog karaktera pošto je određivanje marginalne funkcije isto tako zadatak minimizacije. Stoga je dobro znati lako provjerljive uslove koji povlače stabilnost. U konveksnoj minimizaciji jedan takav uslov je Slejterov. Zaista, neka je $g(x^0) < \mathbf{0}$ za neku tačku $v^0 \in \mathcal{C}$. Stavljajući

$$\varepsilon = - \min_{i=1,\dots,m} g_i(x^0)$$

imamo da za sve v takve da je $\|v\|_\infty < \varepsilon$ vrijedi $g(x^0) < v$. Dakle, $x^0 \in \mathcal{G}_v$ i $p(v) < +\infty$ (Primjedba 5.). Ovo znači da je $\mathbf{0} \in$ int dom(p), a $\mathbf{0} \in$ int $\mathcal{D}(p)$, uz uslov $p(\mathbf{0}) > -\infty$. Odavde je $\partial p(\mathbf{0}) \neq \varnothing$ (Teorema 24.).

Sada ćemo vidjeti da svi uslovi regularnosti garantuju stabilnost zadataka konveksne minimizacije, tako što ćemo ustanoviti ekvivalentnost problema (NP), sa egzistencijom KKT i STL tačaka, koristeći pojam stabilnosti.

Teorema 45 *Neka su f i $g_1, ..., g_m$ konveksne, diferencijabilne funkcije na otvorenom skupu $\mathcal{C}$ i x^* rješenje problema (P). Tada postoji $y^* \geqslant \mathbf{0}$ takav da je (x^*, y^*) KKT tačka ako i samo ako je problem (P) stabilan.*

Dokaz. Neka je (P) stabilan. Iz teoreme jake dualnosti slijedi da dualan problem ima rješenje y^*, pri čemu je $f(x^*) = \varphi(y^*)$. Pokažimo da je (x^*, y^*) KKT tačka. Pošto je

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathcal{C}} (f(x) + \langle y^*, g(x) \rangle)$$

gradijent konveksne funkcije

$$x \mapsto L(x, y^*)$$

u x^* jednak je $\mathbf{0}$, tj. vrijedi (48). Dalje, iz gornje jednakosti imamo $f(x^*) \leqslant f(x^*) + \langle y^*, g(x) \rangle$, ili $0 \leqslant \langle y^*, g(x^*) \rangle$. Kako je $y^* \geqslant \mathbf{0}$, $g(x^*) \leqslant \mathbf{0}$, to je $0 \geqslant \langle y^*, g(x^*) \rangle$ i vrijedi (49).
Obratno, dokažimo da je problem (P) stabilan, ako je (x^*, y^*) KKT tačka za neki $y^* \geqslant \mathbf{0}$. U tom slučaju, zbog (48), (49) i konveksnosti funkcija f, g_i, vrijedi za sve $x \in \mathcal{C}$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* g_i(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i^* (g_i(x) - g_i(x^*)) \geqslant \sum_{i=1}^{m} y_i^* \langle \nabla g_i(x^*), x - x^* \rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{m} y_i^* \nabla g_i(x^*), x - x^* \right\rangle = -\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geqslant f(x^*) - f(x),$$

odnosno

$$f(x) \geqslant f(x^*) - \langle y^*, g(x) \rangle.$$

Dakle, $p(\mathbf{0}) \leqslant \inf_{x \in \mathcal{C}} (f(x) + \langle y^*, g(x) \rangle)$, pa prema Primjeru 25-c je $y^* \in \mathcal{L}$, što znači $-y^* \in \partial p(\mathbf{0})$. $\square$

Bez uslova diferencijabilnosti, a u vezi sa STL tačkom imamo.

Teorema 46 *Neka je x^* rješenje problema (P). Tada postoji $y^* \geqslant \mathbf{0}$ takav da je (x^*, y^*) STL tačka i vrijedi $\langle y^*,\ g(x^*)\rangle = 0$ ako i samo ako (P) je stabilan problem.*

Dokaz. Kao prvo, ako je (x^*, y^*) sedlasta tačka funkcije L, i ako je $\langle y^*, g(x^*)\rangle = 0$ nejednakost $L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*)$ je isto što i $f(x) \geqslant f(x^*) - \langle y^*, g(x)\rangle$. Kao i ranije, ovo povlači $-y^* \in \partial p(\mathbf{0}) \neq \varnothing$. Obratno, prema Teoremi jake dualnosti problem (D) ima rješenje, pa na osnovu (64) i (65) (x^*, y^*) je sedlasta tačka. □

Posebni slučajevi u dualnosti

Konveksno programiranje

Teorema 47 *Neka su funkcije f i g neprekidne, konveksne na zatvorenom konveksnom skupu $\mathcal{C}$, i $\mathrm{lev}(f, \alpha)$ ograničen za neki α. Tada je $\pi = \delta$.*

Dokaz. Prvo, f je neprekidna, $\mathrm{lev}(f, \alpha)$ zatvoren i ograničen, pa postoji tačka njenog minimuma na $\mathcal{C}$. (vidjeti ...) Samim tim je $p(\mathbf{0})$konačan. Dovoljno je da ustanovimo poluneprekidnost funkcije p u $\mathbf{0}$. Tada je $p(\mathbf{0}) = p^{cc}(\mathbf{0})$, i $\pi = \delta$ (Teorema 45).
Dakle, neka p nije p.n.o. u $\mathbf{0}$. Postoje $\varepsilon > 0$ i niz (v^k) takvi da je

$$\|v^k\| \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{i} \quad p(\mathbf{0}) - \varepsilon \geqslant p(v^k).$$

Zbog $p(v^k) = \inf\limits_{g(x) \leqslant v^k} f(x)$ i konačnosti $p(v^k)$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $x^k \in \mathcal{C}$ sa svojstvom $g(x^k) \leqslant v^k$, i $p(v^k) \leqslant f(x^k) < p(v^k) + \frac{\varepsilon}{2}$. Slijedi

$$f(x^k) < p(\mathbf{0}) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zbog konveksnosti funkcije f i ograničenosti jednog nivoskog skupa imamo da je svaki nivoski skup zatvoren i ograničen (zadatak...). Dakle, (x^k) ima podniz koji konvergira ka $x^0 \in \mathcal{C}$. Jasno, $g(x^0) \leqslant \mathbf{0}$ i $f(x^0) \leqslant p(\mathbf{0}) - \frac{\varepsilon}{2}$, odakle je $p(\mathbf{0}) \leqslant p(\mathbf{0}) - \frac{\varepsilon}{2}$. □ Imajući na umu da Slejterov uslov povlač stabilnost problema (KP), odmah dobijamo sljedeći dovoljan uslov za (D).

Teorema 48 (jaka) *Neka je $p(\mathbf{0})$ konačan, funkcije f i g konveksne na $\mathcal{C}$ i neka je ispunjen Slejterov uslov. Tada (D) ima rješenje i $\pi = \delta$.*

Teorema 49 (inverzna) *Neka su funkcije f i g neprekidne, konveksne na zatvorenom konveksnom skupu $\mathcal{D}$, u^* rješenje dualnog problema, skup $\mathrm{lev}(L|_{u=u_0}, \delta)$ kompaktan i $\mathrm{lev}(L|_{u=u_0}, \delta) \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$. Tada primalan problem (P) ima rješenje x^* i $f(x^*) = \varphi(u^*)$.*

Dualnost u Linearnom programiranju

Posmatrajmo ponovo osnovni oblik problema (LP)

$$\min\ c^\top x, \quad Ax \geqslant b.$$

Uzmimo da je $f(x) = c^\top x$, i $g(x) = b - Ax$. Ovdje su funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, i $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ konveksne. Odgovarajuća Lagranžova funkcija glasi

$$L(x,u) = f(x) + u^\top g(x) = c^\top x + u^\top (b - Ax),$$

pa je

$$\varphi(u) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,u) = u^\top b + \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left(c - A^\top u\right)^\top x = \begin{cases} u^\top b, & \mathrm{A}^\top u = c \\ -\infty, & \text{inače} \end{cases}$$

Sada dualan problem

$$\max\ \varphi(u),\ u \in \mathbb{R}^m_+$$

postaje

$$\max\ \{b^\top u :\ A^\top u = c,\ u \geqslant \mathbf{0}\},$$

što smo i naveli u uvodu ovog poglavlja.

Kanonski zadatak postaje osnovni tako što se dopustivi skup zapisuje sistemom $\begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{I} \end{pmatrix} x \geqslant \begin{pmatrix} b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Sada, dualan problem je

$$\max\ (b^\top, \mathbf{0}^\top)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (\mathrm{A}^\top, \mathrm{I})\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c,\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geqslant \mathbf{0},$$

ili ekvivalentno

$$\max\ b^\top u, \quad \mathrm{A}^\top u \leqslant c,\ u \geqslant \mathbf{0}.$$

I preostala dva problema linearnog programiranja svode se na osnovni, pošto vrijedi

$$Ax = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \geqslant \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}.$$

Dual standardnog neposredno dobijamo iz dualnog kanonskog problema i on glasi:

$$\max\ b^\top u^1 + (-b)^\top u^2$$

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \leqslant c,\ \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \geqslant \mathbf{0},$$

odnosno

$$\mathrm{A}^\top u^1 - \mathrm{A}^\top u^2 \leqslant c,\ u^1 \geqslant \mathbf{0}, u^2 \geqslant \mathbf{0}.$$

Stavljajući da je $u = u^1 - u^2$ konačno dobijamo dualan zadatak

$$\max\ b^\top u, \quad A^\top u \leqslant c.$$

	LP	DLP
	$\min c^\top x$	$\max b^\top u$
osnovni	$\mathrm{A}x \geqslant b$	$\mathrm{A}^\top u = c,\ u \geqslant \mathbf{0}$
kanonski	$\mathrm{A}x \geqslant b,\ x \geqslant \mathbf{0}$	$\mathrm{A}^\top u \leqslant c,\ u \geqslant \mathbf{0}$
standardni	$\mathrm{A}x = b,\ x \geqslant \mathbf{0}$	$\mathrm{A}^\top u \leqslant c$
	$\mathrm{A}x = b$	$\mathrm{A}^\top u = c$

Primjedba 15 *Vidjeli smo da standardnom problemu odgovara dualan problem maksimizacije, koji se svodi na osnovni problem minimizacije. Dodijelimo i njemu dualan problem:*

$$\min\{c^\top x : \mathrm{A}x = b, x \geqslant \mathbf{0}\} \overset{(D)}{\longrightarrow} \max\{b^\top u : \mathrm{A}^\top u \leqslant c\} =$$

$$-\min\{-b^\top u : -\mathrm{A}^\top u \geqslant -c\} \overset{(D)}{\longrightarrow} -\max\{-c^\top x : (-\mathrm{A}^\top)^\top x = -b, x \geqslant \mathbf{0}\}$$

$$= \min\{c^\top x : \mathrm{A}x = b, x \geqslant \mathbf{0}\}.$$

U ovom smislu možemo reći da je dualan problem dualnog primalan problem.

U linearnom programiranju teoreme dualnosti su jednostavnije za primjenu, nego u opštem slučaju. Prije svega, svaki dualan zadatak je ekvivalentan (po rješivosti) nekom od primalih zadataka (standardni osnovnom, kanonski kanonskom,...), a zbog afinosti svih funkcija $g_i,\ i \in \mathcal{J}$ problem (LP) je stabilan, uz prirodnu pretpostavku da je dopustivi skup $\mathcal{G}$ neprazan. Naime, tada je ispunjen uopšteni Slejterov uslov regularnosti, a on povlači stabilnost. Ovdje se ponovo vidi velika uloga teorema alternative (Aleksandrov-Fan, Gejl, Farkaš i Fredholm), sada za utvrđivanje nepraznosti dopustivih skupova.
Navedimo sada varijante torema dulnosti u (LP):

1. *Ako su oba dopustiva skupa neprazna, onda problem* (LP) *i odgovarajući* (DLP) *imaju optimalna rješenja.*

Zaista, ako su $x^0,\ u^0$ dopustive za dualan, prema teoremi slabe dualnosti imamo da je $b^\top u^0 \leqslant \pi \leqslant c^\top x^0$, tako da je π konačan. Kako je (LP) stabilan, prema Teoremi jake dualnosti problem (DLP) ima rješenje i vrijedi $\pi = \delta$. Za (DLP), na osnovu Teoreme jake dualnosti uz Primjedbu 13. zaključak je isti. Optimalna vrijednost problema minimizacije koji je ekvivalentan sa (DLP) je konačna, problem je stabilan, te njegov dual, odnosno (LP) ima rješenje.

2. *Problem* (LP) *ima rješenje ako i samo ako problem* (DLP) *ima rješenje.*

Ovo jednostvno dobijamo iz prethodnih razmatranja.

Primjer 35 *U zavisnosti od a, b_1, b_2, b_3 riješiti problem*

$$\min\ x_1 + x_2 + x_3,$$

$$ax_1 + x_2 + x_3 \geqslant b_1,\ x_1 + ax_2 + x_3 \geqslant b_2,\ x_1 + x_2 + ax_3 \geqslant b_3.$$

Rješenje. Ovdje je $c = (1,1,1)^\top,\ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix},\ b = (b_1, b_2, b_3)^\top,$ *pa dualan zadatak glasi*

$$\max\ b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3,\ u = (u_1, u_2, u_3) \geqslant \mathbf{0},\ \mathrm{A}u = \mathbf{1}.$$

Zavisno od vrijednosti det A *razlikujemo tri slučaja:*

1. $a = 1$.
Tada je Dop (D)= σ^3, *tako da optimalna vrijednost dualnog problema je* $\delta = \max\ \{b_1, b_2, b_3\}$, *a optimalno rješenje je jedan od vektora* e^1, e^2, e^3. *Jasno,* $(\delta, 0, 0), (0, \delta, 0), (0, 0, \delta)$ *su dopustive za polazni zadatak, zato što je Dop (P)=* $\mathcal{H}_+(\mathbf{1}, \delta)$. *Slijedi da su to i optimalne tačke.*

2. $a = -2$.
Prema teoremi Aleksandrov - Fana imamo da je Dop (D)= $\varnothing$, *a Dop (P)* $= \varnothing$, *ako i samo ako je* $b_1 + b_2 + b_3 > 0$. *U oba slučaja je* $\delta = -\infty$, *dok je* $\pi = +\infty$, *odnosno* $\pi = -\infty$.

3. $(a-1)(a+2) \neq 0$.
Ovdje je Dop (P) $\neq \varnothing$. *Dop (D) je neprazan za* $a > -2$, *Dop (D)=* $\frac{1}{a+2}\mathbf{1}$, $\pi = \delta = \frac{b_1+b_2+b_3}{a+2}$. *Optimalna tačka je* $\frac{1}{(a-1)(a+2)} \begin{pmatrix} b_1(a+1) - b_2 - b_3 \\ b_2(a+1) - b_1 - b_3 \\ b_3(a+1) - b_1 - b_2 \end{pmatrix}$.

Dualnost u QP

Neka je sada dat zadatak kvadratnog programiranja (QP)

$$\min\ \{f(x)\ :\ x \in \mathcal{G}\},$$

gdje je

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx - c^\top x, \quad \mathcal{G} = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ Ax \leqslant b\},$$

Q je simetrična PD matrica reda n, $c \in \mathbb{R}^n$, dok je $A \in \mathcal{M}(m,n)$ Odredimo dualan problem (QD). U skladu sa ??? imamo da je (QD)

$$\max\ \{\varphi(y)\ :\ y \in \mathbb{R}^n_+\},$$

$$\varphi(y) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2}x^\top Qx - c^\top x + y^\top (Ax-b)\right).$$

Pošto je $L(x,y)$ strogo konveksna funkcija, ona za svaki fiksiran y dostiže minimum u tački x takvoj da je $\nabla_x L(x,y) = \mathbf{0}$. Dakle, iz

$$x^\top Q - c^\top + y^\top A = \mathbf{0}, \quad \text{tj.} \quad Qx = c - A^\top y$$

slijedi

$$x = -Q^{-1}A^\top y + Q^{-1}c.$$

Za dobijenu vrijednost x funkcija φ je data sa

$$\varphi(y) = -\frac{1}{2}y^\top AQ^{-1}Ay + y^\top \left(AQ^{-1}c - b\right) - \frac{1}{2}c^\top Qc,$$

koju treba maksimizirati na skupu $\mathbb{R}^n_+$, i to je (QD). Ovdje još uočimo da je

$$\nabla^2_{xx}L(x,y) = Q$$

regularna matrica (pošto je pozitivno definitna), tako da vrijedi i obratna teorema dualnosti, pri čemu je

$$x^* = Q^{-1}\left(c - A^\top y^*\right).$$

Dualnost u Vulfovom smislu

U konveksnom slučaju zaključke nije potrebno izvlačiti iz opšteg, već se može posmatrati dualnost u Vulfovom smislu. Za problem (P)

$$\min\ f(x), \quad g(x) \leqslant \mathbf{0},$$

i njegov dual (DW)

$$\max L(y,u), \quad \nabla_x L(y,u) = \mathbf{0},\ y \in \mathcal{C},\ u \geqslant \mathbf{0},$$

teorema slabe dualnosti glasi.

Teorema 50 *Za svaki $x^0 \in \mathcal{G}$, i svako dopustivo rješenje (y^0,u^0) problema* (DW) *vrijedi*

$$f(x^0) \geqslant L(y^0,u^0).$$

I teoremu jake dualnosti dokazao je Vulf 1961 godine.

Teorema 51 *Neka su funkcije $f, g_i (i = \overline{1,m})$ konveksne i diferencijabilne na skupu $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$. Pretpostavimo još da je ispunjen Slejterov uslov i da je x^* rješenje primalnog problema. Tada postoji u^* takav da je (x^*,u^*) rješenje dualnog problema.*

Dokaz. Iz uslova teoreme slijedi da postoji $u^* \in \mathbb{R}^m$ takav da (x^*, u^*) zadovoljava KKT uslove, pa je $u^* \geqslant \mathbf{0}, \nabla_x L(x^*, u^*) = \mathbf{0}$, i $\langle g(x^*), u^*) \rangle = 0$. Ovo znači da je (x^*, u^*) dopustiva tačka za (DW), i $f(x^*) = L(x^*, u^*)$. Iz prethodne teoreme, za sve dopustive (y, u) vrijedi $f(x^*) \geqslant L(y, u)$, odnosno $L(x^*, u^*) \geqslant L(y, u)$, pa zaključujemo da je (x^*, u^*) rješenje dualnog problema. □

Primjedba 16 *Naveli smo da dualan zadatak u Vulfovom smislu ne mora biti zadatak konveksne optimizacije, pošto skup rješenja jednačine iz uslova problema* (DW) *nije obavezno konveksan. Međutim ako nam je poznat x^*, onda se vektor u^* može dobiti kao rješenje standardnog problema linearnog programiranja:*

$$\max \{u^\top g(x^*) : \; G^\top (x^*) u = -\nabla f(x^*), \; u \geqslant \mathbf{0}\}.$$

Inverznu teoremu dualnosti za konveksne funkcije dokazali su je Juar, Henson.

Teorema 52 *Neka su konveksne funkcije f i $g_i (i \in \mathcal{J})$ klase $C^2(\mathcal{C})$. Ako je (x^*, u^*) rješenje dualnog problema* (DW) *i matrica $\nabla^2_{xx} L(x^*, u^*)$ regularna, onda je x^* rješenje primalnog problema.*

Dokaz. Pokažimo da je (x^*, u^*) KKT tačka za (P), pa iskoristimo teoremu 36. Kako je data tačka dopustiva za (DW) slijedi $u^* \geqslant \mathbf{0}$ i $\nabla_x L(x^*, u^*) = \mathbf{0}$, tj (52). Preostaje da se utvrdi uslov komplementarnosti (53) i da je $g(x^*) \leqslant \mathbf{0}$. U tom cilju posmatramo funkciju

$$\Phi : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n, \quad \Phi(x, u) = \nabla_x L(x, u).$$

Za nju su ispunjeni uslovi Teoreme o implicitnoj funkciji, u tački (x^*, u^*) :

$$\Phi(x^*, u^*) = 0, \quad \det \nabla_x \Phi(x^*, u^*) \neq 0,$$

tako da postoje kugla $B = B(u^*, \varepsilon)$ i funkcija ϕ klase C^2 na B, takva da je

$$x^* = \phi(u^*), \quad \nabla_x L(\phi(u), u) = \mathbf{0}, \quad \text{za svaki} \quad u \in B.$$

Prema pretpostavci, problem minimizacije funkcije $\Lambda, \Lambda(u) = -L(\phi(u), u)$ na $\mathbb{R}^m_+$ ima lokalno rješenje u^*, pa mora biti (ispunjen je uopšteni Slejterov uslov)

$$\nabla \Lambda(u^*) - \mathrm{I}v^* = \mathbf{0}, \quad v^* \geqslant \mathbf{0}, \quad \langle u^*, v^* \rangle = 0.$$

Dalje imamo

$$-\nabla \Lambda(u^*) = \nabla_x L(\phi(u^*), u^*) \nabla \phi(u^*) + \nabla_u L(\phi(u^*), u^*) =$$

$$= \nabla_x L(x^*, u^*) \nabla \phi(u^*) + \nabla_u L(x^*, u^*) = \nabla_u L(x^*, u^*) = g(x^*).$$

Sada iz $v^* = \nabla\Lambda(u^*) = -g(x^*)$ nakon skalarnog množenja sa e^i, $i = 1,...,m$, zbog $v^* \geqslant \mathbf{0}$, dobijamo

$$g(x^*) \leqslant \mathbf{0}.$$

Na kraju je

$$\langle u^*, g(x^*)\rangle = -\langle u^*, v^*\rangle = 0. \quad \square$$

$$\min\ c^\top x,$$

pri uslovima

$$Ax \geqslant b, \quad x \geqslant \mathbf{0}.$$

Uzmimo da je $f(x) = c^\top x$, i $g(x) = \begin{pmatrix} b - Ax \\ -x \end{pmatrix}$. Ovdje su funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ konveksne. Odgovarajuća Lagranžova funkcija, uz $y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ glasi

$$L(x, y) = f(x) + y^\top g(x) = c^\top x + u^\top b - u^\top Ax - v^\top x,$$

pa je

$$\varphi(y) = \inf_x\ L(x, y) = u^\top b + \inf_{x\in\mathbb{R}^n}\ \left(c - A^\top u - v\right)^\top x = \begin{cases} u^\top b, & \mathrm{A}^\top u = c - v \\ -\infty, & \text{inače} \end{cases}$$

Sada dualan problem

$$\max\ \varphi(y),\ y \in \mathbb{R}^m_+$$

zbog ekvivalentnosti uslova $y \geqslant \mathbf{0}$ sa $u \geqslant \mathbf{0}$ i $v = c - A^\top u \geqslant \mathbf{0}$ postaje

$$\max\ u^\top b,$$

$$A^\top u \leqslant c,\ u \geqslant \mathbf{0},$$

što smo i naveli u uvodu ovog poglavlja.

ZADACI

1. Neka je f diferencijabilna i konveksna funkcija na R^n. Može li da bude $\inf\limits_{x \geqslant \mathbf{0}} f(x) = -\infty$?

2. Naći min $f(x), x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|$, pri čemu a_i su dati realni brojevi, $a_1 < ... < a_n$.

3. Neka je f diferencijabilna na $\mathbb{R}^n$. Tada je x^* tačka njenog globalnog minimuma ako i samo ako je

$$\bigtriangledown f(x^*) = \mathbf{0}, \; f(x^*) = f^{**}(x^*).$$

4. Da li zadatak max $\{c^\top x : \mathrm{A}x \leqslant b\}$ ima rješenje ako je $c \geqslant \mathbf{0}$ i $\mathrm{A} \leqslant \mathrm{O}$?

5. Odrediti STL za problem (KP), gdje je $\mathcal{C} = \mathbb{R}_+$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = x^2$.

6. Naći potreban i dovoljan uslov za postojanje rješenja zadataka (LP):

a) min $\{c^\top x : \mathrm{A}x = b, \; x \geqslant \mathbf{0}\}$, b) min $\{c^\top x : \mathrm{A}x = b\}$.

7. Riješiti problem: $x_1 + ... + x_n \longrightarrow$ min,

$$\begin{array}{lllll} x_1 + x_2 & & & & \geqslant b_1 \\ & x_2 + x_3 & & & \geqslant b_2 \\ & & ..... & & ..... \\ & & & x_{n-1} + x_n & \geqslant b_{n-1} \\ x_1 & & & +x_n & \geqslant b_n \end{array}$$

8. Da li je vektor $x^0 = (1, 1, 0)^\top$ rješenje standardnog zadatka (LP), za koji je $c^\top = (1, 8, 10)$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b^\top = (2, 0)$.

9. Riješiti problem: $x_1^2 + 2\,x_2^2 + \cdots + n\,x_n^2 \rightarrow$ min, pri uslovima:
a) $x_1 + \cdots + x_n = 1$, b) $x_1 + \cdots + x_n \leqslant 1$,
c) $|x_1 + \cdots + x_n| \leqslant 1$, d) $|x_1 + \cdots + x_n| \leqslant 1$, $x_1 \geqslant 0, ..., x_n \geqslant 0$.

10. Za date vektore $v^1, ..., v^m \in \mathbb{R}^n$, na kugli $\mathcal{B}_1$, naći minimum funkcije

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \|x - v^i\|^2.$$

11. Riješiti zadatak:

$$15\,x_1 + 48\,x_2 \rightarrow \min$$

$$\frac{5}{x_1} + \frac{9}{x_2} - \frac{17}{20} \leqslant 0, \; x_1 > 0, \; x_2 > 0.$$

12. Naći maksimalnu vrijednost Vandermondove determinante $V(x_1, x_2, x_3)$, uz uslove: $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3,\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 3$.

13. Riješiti problem min $\{f(x) : x \in \mathcal{G}\}$, gdje je
a) $\mathcal{C}=$ int $\mathbb{R}^4_+$,
b) $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 \geqslant 0\}$, i

$$f(x) = \sqrt{x_1} + \frac{1}{x_2^2}, \quad \mathcal{G} = \left\{ x \in \mathcal{C} \ : \ \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_4}{x_1} \leqslant 1,\ \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_4}{x_3} \leqslant 1 \right\}.$$

14. Naći maksimum funkcije $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ na konveksnom omotaču tačaka:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

15. Odrediti udaljenost tačke $T(2, 1, 5, 4)$ od skupa

$$\{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4\}.$$

16. Naći projekciju tačke $T(0, 1)$ na poliedar dat sistemom nejednačina:

$$x_1 + 3x_2 \geqslant 3,\ 3x_1 + 2x_2 \geqslant 6,\ -x_1 + x_2 \leqslant 1.$$

17. Riješiti zadatak razlomljenog programiranja

$$\min \frac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2 + 2},$$

$3x_1 + x_2 \geqslant 7,\ -x_1 + 4x_2 \leqslant 5, 4x_1 - 3x_2 \leqslant 17,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

18. Neka je f konveksna (polu)neprekidna na zatvorenom konveksnom konusu $\mathcal{K}$. Pokazati da je za problem $\min\{f(x) : x \in \mathcal{K}\}$ dualan $\max\{-f^*(y) : \langle y, x\rangle \geqslant 0\ \forall x \in \mathcal{K}\}$.

19. Odrediti (DW) problem za (LP) zadatak

$$\min c^\top x,\ \mathrm{A}x = b.$$

Pokazati da je skup rješenja $\varnothing$ ili čitav dopustivi skup.

20. Naći optimalne vrijednosti π i δ, ako su u (P) f, g i $\mathcal{C}$ dati sa:

$f(x)$	$g(x)$	$\mathcal{C}$
$x+1$	x	$]-\infty, 1]$
$x+1$	x	$[1, 2]$
$-\sqrt{x}$	x	$[0, +\infty[$.

21. Neka su x^0, y^0 dopustive tačke za kanonski (LP) i njegov dual. Tada su to optimalne tačke ako i samo ako je

$$\left\langle \mathrm{A}x^0 - b, y^0 \right\rangle = \left\langle \mathrm{A}^\top y^0 - c, x^0 \right\rangle = 0.$$

22. Formirati dualan za (LP) problem

$$\min -x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3,$$

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1,\ 2x_1 + x_2 \leqslant 3,\ x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0$, pa ih riješiti.

23. Riješiti $f(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 \longrightarrow \min, \quad g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 \leqslant 0$, i njegov dualan problem.

24. Neka je $x \in \mathbb{R}^n_+$. Za problem minimizacije funkcije

$$f(x) = \|x\|^2 \text{ uz } \langle \mathbf{1}, x \rangle \geqslant n,$$

odrediti dualan problem, pa ih riješiti.

25. Pomoću teorije dualnosti riješiti zadatak linearnog programiranja

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \rightarrow \min,$$

$$x_1 \geqslant 1, x_1 + x_2 \geqslant 2, ..., x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant n,\ x_i \geqslant 0, i = 1, ..., n.$$

26. U terminima matematičkog programiranja opisati ograničenost poliedra $\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \mathrm{A}x = b\right\}, \mathrm{A} \in \mathcal{M}(m, n), b \in \mathbb{R}^m$.

27. Ispitati konveksnost funkcije $f(x, y) = x\,y^2 + x^2\,y - 3\,x^2 - 3\,y^2$, na $\mathbb{R}^2_+$, pa naći njen minimum uz dodatni uslov $1 \leqslant x + y \leqslant 6$, i napisati dualan problem.

28. Za problem za $\min\ (e^{-x_1} + 2e^{-x_2}),\ x_1 + x_2 \leqslant 2, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0.$ odrediti dualan .

29. Neka je f konveksna funkcija i $\nabla f(x^0) \geqslant \mathbf{0}$ za neki $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Pomoću tih vektora odrediti donju granicu vrijednosti π u problemu

$$\min f(x), \quad \langle \mathbf{1}, x \rangle \leqslant 1,\ x \geqslant \mathbf{0}.$$

30. Naći $\min \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i| \right)$, ako je $x \in \mathbb{R}^n$ i $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

31. Neka je $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_2 \geqslant 1\}, \mathcal{G} = \{x \in \mathcal{C} \ : \ -x_1 \leqslant 0\}$, i f data sa $f(x) = \max \left\{0, x_1 + \frac{1}{x_2}\right\}$. Analizirati probleme (P) $\min f(x),\ x \in \mathcal{G}$, i njegov (D).

32. Odrediti marginalnu funkciju i ispitati stabilnost problema minimizacije funkcije f, uz date uslove: $f(x_1, x_2) = x_2,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,\ x_1 - x_2^2 \geqslant 0$.

RJEŠENJA

2. Data funkcija je konveksna, ali nije diferencijabilna pa ćemo koristiti sljedeće:

$$f(x^*) = \min f(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \partial f(x^*).$$

Uzmimo: $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x),\ f_k(x) = |x - a_k|$. Tada je $\partial f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \partial f_k(x)$, gdje je

$$\partial f_k(x) = \begin{cases} \{-1\}, & x < a_k \\ [-1,1]\,, & x = a_k \\ \{1\}, & x > a_k. \end{cases}$$

Slijedi $\partial f(a_k) = [2k-n-2, 2k-n]$, i $\partial f(x) = \{2k-n\}$, za $a_k < x < a_{k+1}$. U slučaju da je n neparan vrijedi $\partial f(a_{\frac{n+1}{2}}) = [-1,1]$, dok pri parnom n imamo $\partial f(a_{\frac{n}{2}}) = [-2,0]$, $\partial f(a_{\frac{n}{2}+1}) = [0,2]$, i $\partial f(x) = \{0\}$, za sve $x \in (a_{\frac{n}{2}}, a_{\frac{n}{2}+1})$. U svim ostalim slučajevima 0 nije u subdiferencijalu. Dakle, za neparan n je

$$x^* = a_{\frac{n+1}{2}},$$

a za parne vrijednosti skup tačaka minimuma je

$$\left[a_{\frac{n}{2}}, a_{\frac{n}{2}+1}\right].$$

3. Neka je x^* tačka minimuma funkcije f, koja je u njoj diferencijabilna. Tada je $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$. Dalje, uvijek je $f^{**} \leqslant f$, pa je i $f^{**}(x^*) \leqslant f(x^*)$. Konstantna funkcija $a : x \mapsto f(x^*)$ je afina minoranta funkcije f, pa je $a \leqslant \mathrm{cl}\ f$, i specijalno vrijedi $f(x^*) \leqslant \mathrm{cl}\ f(x^*) = f^{**}(x^*)$. Pretpostavimo sada da je $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$, i $f(x^*) = f^{cc}(x^*)$, pa dokažimo da je x^* tačka minimuma funkcije f^*. Tada je u x^* minimum i funkcije f, zbog

$$f(x^*) = f^{**}(x^*) \leqslant f^{**}(x) \leqslant f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Dalje, pošto je f^* konveksna funkcija dosta je dokazati da je njen gradijent u x^* nula vektor. Dakle, za $t > 0$ vrijedi

$$\frac{f^{**}(x^* + te^k) - f^{cc}(x^*)}{t} \leqslant \frac{f(x^* + te^k) - f(x^*)}{t}.$$

Odavde, na osnovu pretpostavke $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$ dobijamo

$$(f^{**})'(x^*, e^k) \leqslant 0.$$

Isto je i za pravac $-e^k$, te za sve k=1,...,n vrijedi

$$0 \leqslant (-f^{**})'(x^*, -e^k) \leqslant (f^{**})'(x^*, e^k) \leqslant 0,$$

odakle slijedi

$$\nabla f^{cc}(x^*) = \mathbf{0}.$$

Primjedba. Ovo je uopštenje Fermaove teoreme. Primjetimo da za funkcije konveksne i diferencijabilne na $\mathbb{R}^n$ drugi uslov je ispunjen, tako da je tada

$$f(x^*) = \min f(x) \Leftrightarrow \nabla f(x^*) = \mathbf{0}.$$

23. $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} kx_k^2$ je konveksna, $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0},\ \mathbf{0} \in \mathcal{G}$, pa je $x^* = \mathbf{0}$.

Da bi se dobio zadatak diferencijabilne optimizacije dovoljno je prvo ograničenje drukčije zapisati:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k - 1 \leqslant 0, \quad \text{i} \quad -\sum_{k=1}^{n} x_k - 1 \leqslant 0.$$

Tada, za Lagranžovu funkciju $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$L(x, u, v, \mathbf{u}) = -u - v + \sum_{k=1}^{n} (2kx_k + u - v - u_k)x_k$$

KKT uslovi su ispunjeni sa $x = \mathbf{0}, u = v = 0,\ \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Na primjer, nije $uv \neq 0$. Ako je $u \neq 0, v = 0$, slijedi

$$2kx_k + u - u_k = 0, (k = 1, ..., n) \text{i} \sum_{k=1}^{n} x_k = 1.$$

Odavde je

$$2kx_k^2 + ux_k = u_k x_k = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{n} 2kx_k^2 + u = 0,$$

što je nemoguće. Slično je i sa $u = 0,\ v \neq 0$. Za $u = v = 0$ dobija se redom za sve $k = \overline{1, n}$

$$2kx_k = u_k, \quad 2kx_k^2 = u_k x_k = 0,\ x_k = 0.$$

24. $\mathcal{G} = \{x \in \mathbb{R}^n \ :\ \langle x, x \rangle \leqslant 1\}, L(x, \alpha) = \sum_{i=1}^{m} \|x - v^i\|^2 + \alpha(\langle x, x \rangle - 1)$.

KKT uslovi su:

$$\sum_{i=1}^{m} (x - v^i) + \alpha x = \mathbf{0}, \quad \alpha(\|x\|^2 - 1) = 0,\ \alpha \geqslant 0, \quad \|x\| \leqslant 1.$$

Stavljajući $v^0 = \dfrac{v^1 + \cdots + v^m}{m}$, dobijamo za prvu jednačinu $(m+\alpha)x = mv^0$. U slučaju da je $\|v^0\| \leqslant 1$, KKT tačka je $\big(v^0, 0\big)$ uz $\alpha = 0$. Ako je $\|v^0\| > 1$, onda mora biti $\alpha > 0$, $\|x\| = 1$ (druga jednačina) i $\|v^0\| = \dfrac{\alpha + m}{m}$, tako da je $\left(\dfrac{v^0}{\|v^0\|}, m(\|v^0\| - 1)\right)$ odgovarajuća KKT tačka.
Zadatak je konveksne optimizacije pa je njegovo optimalno rješenje

$$x^* = \begin{cases} v^0, & \|v^0\| \leqslant 1 \\ \dfrac{v^0}{\|v^0\|}, & \|v^0\| > 1. \end{cases}$$

11. $x^* = (20, 15)$

12. Funkcija $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, V(x_1, x_2, x_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$ je neprekidna i dostiže maksimum na datoj piramidi. Ispunjen je Slejterov uslov, tako da ćemo tačku maksimuma naći među KKT tačkama. Lagranžova funkcija je $L(x, u) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) - u_1 x_1 + u_2(x_1 - x_2) + u_3(x_2 - x_3) + u_4(x_1 + x_2 + x_3 - 3)$, pa su KKT uslovi :

$$\begin{gathered}
(x_3 - x_2)(2x_1 - x_2 - x_3) - u_1 + u_2 + u_4 = 0, \\
(x_3 - x_1)(x_1 - 2x_2 + x_3) - u_2 + u_3 + u_4 = 0, \\
(x_2 - x_1)(-x_1 - x_2 + 2x_3) - u_3 + u_4 = 0, \\
u_1 x_1 = 0,\ u_2(x_1 - x_2) = 0,\ u_3(x_2 - x_3) = 0, \\
u_4(x_1 + x_2 + x_3 - 3) = 0, \\
\mathbf{u} \geqslant \mathbf{0},\ x \in \mathcal{G}.
\end{gathered}$$

Kako je $V(x_1, x_1, x_3) = V(x_1, x_2, x_2) = 0$, mora biti $x_1 \neq x_2$ i $x_2 \neq x_3$, tj. $u_2 = u_3 = 0$. Ako bi bilo i $u_1 = u_4 = 0$ imali bismo $x_1 = x_2 = x_3$. Suma prvih sabiraka prve tri jednačine je 0, tako da je $u_1 = 3u_4$. Stoga je $u_1 \neq 0$, kao i $u_4 \neq 0$, te je $x_1 = 0,\ x_2 + x_3 = 3$. Sada se dobija $x_3(x_3 - 2x_2) = x_2(2x_3 - x_2)$,

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{2\dfrac{x_3}{x_2} - 1}{\dfrac{x_3}{x_2} - 2}\ .$$

Iz $\dfrac{x_3}{x_2} \in \left\{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\right\}$, zbog $x_3 \geqslant x_2, x_2 + x_3 = 3$ slijedi $x_3 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$. Dakle,

$$V\left(0, \frac{3 - \sqrt{3}}{2}, \frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} = V_{\text{opt}}.$$

Napomena. Funkcija V nije konkavna, ($\nabla^2 V(x_1,x_2,x_3) = 2\begin{pmatrix} x_3-x_2 & x_2-x_1 & x_1-x_3 \\ x_2-x_1 & x_1-x_3 & x_3-x_2 \\ x_1-x_3 & x_3-x_2 & x_2-x_1 \end{pmatrix}$).

13. S obzirom da je ispunjen Slejterov uslov (uzeti npr. tačku $(8,2,5,2)$), a ne postoji KKT tačka slijedi $\mathcal{G}_{\text{opt}} = \varnothing$. Za promjenu zadržimo funkciju cilja, a ograničenja izmjenimo tako da je $x_4 \geqslant 0$ umjesto $x_4 > 0$. Sada su aktivna ograničenja

$$x_3 + x_4 \leqslant x_1, \quad x_2 + x_4 \leqslant x_3, \quad x_4 \geqslant 0.$$

U novom zadatku Karuš Kun Takerovi uslovi su

$$\frac{1}{2\sqrt{x_1}} - u_1 = 0,\ -\frac{2}{x_2^3} + u_2 = 0,\ u_1 - u_2 = 0,\ u_1 + u_2 - u_3 = 0,$$

$$u_1(-x_1 + x_3 + x_4) = 0,\ u_2(x_2 - x_3 + x_4) = 0,\ u_3 x_4 = 0.$$

Imamo $u_1 \neq 0$, i $u_3 \neq 0$ (prema prvom i četvrtom uslovu), tako da je $x_4 = 0$, $x_1 = x_3$, $u_1 = u_2$, i $2u_1 = u_3$. Slijedi $x_1 = x_2$, i $x_1 = \dfrac{2}{\sqrt[5]{2}}$, pa je tačka

$$\left(\frac{2}{\sqrt[5]{2}}, \frac{2}{\sqrt[5]{2}}, \frac{2}{\sqrt[5]{2}}, 0\right)$$

moguće rješenje novog zadatka, a da li je vidite sami.

14. $(x^*, y^*) = (7.5, 6, 0, 0, 1.5, 0, 0)$

15. Posmatrane funkcije su konveksne, f je strogo konveksna, pa je rješenje problema jedinstveno. $x^* = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$, $y^* = (1, 0, 1)$, $d(x^*, \mathcal{G}) = 1$.

16. Neka je $\mathcal{P}$ dati poliedar. Za traženu projekciju $x^* = pr_{\mathcal{P}}(e^2)$ vrijedi

$$\|e^2 - x^*\| = \min_{x \in \mathcal{P}} \sqrt{x_1^2 + (x_2 - 1)^2}.$$

Korjena funkcija strogo raste pa dovoljno je riješiti problem kvadratne minimizacije:

$$\min\ x_1^2 + (x_2 - 1)^2, \quad x \in \mathcal{P}.$$

$x^* = \left(\frac{12}{13}, \frac{21}{13}\right)$, $y^* = \left(0, \frac{8}{13}, 0, 0, 0\right)$, $pr_{\mathcal{P}}(e^2) = \left(\frac{12}{13}, \frac{21}{13}\right)$.

17.. Slejterov uslov je ispunjen. Posljednje ograničenje nije aktivno. Uz $x \in \mathcal{G}$, $\lambda \geqslant \mathbf{0}$, KKT uslovi su:

$$\frac{7x_2 + 2}{(3x_1 + x_2 + 2)^2} = 3\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 + \lambda_4,\ \frac{-7x_1 - 4}{(3x_1 + x_2 + 2)^2} = \lambda_1 - 4\lambda_2 + 3\lambda_3,$$

$\lambda_1(7-3x_1-x_2)=0,\ \lambda_2(-x_1+4x_2-5)=0,\ \lambda_3(4x_1-3x_2-17)=0,\ \lambda_4 x_1=0.$

Iz drugog uslova je $\lambda_2 \neq 0,\ x_1 = 4x_2 - 5.\ x_1 \neq 0,$ (jer $(0, \frac{5}{4}) \notin \mathcal{G}$),) $\lambda_4 = 0.$

Iz prve dvije jednakosti je $\dfrac{3}{169(x_2-1)^2} = \lambda_1 - \lambda_3$, odakle (zbog $\lambda \geqslant 0$) je $\lambda_1 \neq 0$. Dakle,

$$x_1 = \frac{23}{13},\ x_2 = \frac{22}{13},\ \lambda_1 = \frac{1}{27},\ \lambda_2 = \frac{7}{117}\ \lambda_3 = 0.$$

Funkcija cilja f nije konveksna na $\mathcal{G}$, što vidimo iz

$$2f\left(\frac{\frac{17}{4}+\frac{23}{13}}{2}, \frac{22}{26}\right) \nleqslant f\left(\frac{17}{4}, 0\right) + f\left(\frac{23}{13}, \frac{22}{13}\right),$$

ali $f\left(\dfrac{23}{13}, \dfrac{22}{13}\right) = -\frac{7}{39}$ globalni minimum.

Problemi ove vrste efikasno se rješavaju na sljedeći načvcin. Smjenom

$$y_0 = \frac{1}{3x_1+x_2+2}, \quad y_1 = y_0 x_1, \quad y_2 = y_0 x_2$$

zadatak postaje :

$$\begin{gathered} \min\ y_1 - 2y_2,\ y \in \mathbb{R}^2_+ \\ 3y_1 + y_2 \geqslant 7y_0, \qquad 4y_1 - 3y_2 \geqslant 17y_0, \\ -y_1 + 4y_2 \leqslant 5y_0, \quad 3y_1 + y_2 + 2y_0 = 1, \end{gathered}$$

odnosno, nakon eliminacije y_0

$$\begin{gathered} \min y_1 - 2y_2 \\ 27y_1 + 9y_2 \geqslant 7, \quad 59y_1 + 11y_2 \leqslant 17, \\ 13y_1 + 13y_2 \leqslant 5, \qquad y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0, \end{gathered}$$

Možemo koristiti simpleks metodu. Uvodeći izravnavajuće promjenljive, i uzimajući da je

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix},\ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 27 & 9 & -1 & 0 & 0 \\ 59 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 13 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 27 & 9 & 0 \\ 59 & 11 & 1 \\ 13 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

vidimo da bazna matrica B zadovoljava početni uslov simpleks metode, pošto je

$$\mathrm{B}^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & 0 & -\frac{1}{26} \\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{3}{26} \\ -\frac{8}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{117} \\ \frac{22}{117} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} \geqslant \mathbf{0}.$$

Test vektor je

$$t^\top = c_{\mathrm{B}}^\top \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A} - c^\top = \left(0, 0, -\frac{1}{6}, 0, -\frac{7}{26}\right) \leqslant \mathbf{0},$$

pa je $y^* = \left(\dfrac{23}{117}, \dfrac{22}{117}\right)$. Sada je $y_0 = \dfrac{1}{9}$, i $x^* = \left(\dfrac{23}{13}, \dfrac{22}{13}\right)$.

32. Ako problem ima rješenje x^* onda, na osnovu teoreme F. Džona, postoje broj u_0 i vektori u^1, u^2 za koje vrijedi:

$$u_0 F(x^*) + u_0 \frac{\partial F}{\partial x}(x^*)x^* - \frac{\partial F}{\partial x}(x^*)u^1 - u^2 = \mathbf{0},$$

$$\left\langle u^1, F(x^*)\right\rangle = 0,\ \left\langle u^2, x\right\rangle = 0,\ (u_0, u^1, u^2) \not\geqslant \mathbf{0}.$$

Sada nakon množenja prve jednačine vektorom $u_0 x^* - u^1$ dobijamo

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x}(x^*)(u_0 x^* - u^1), u_0 x^* - u^1 \right\rangle + u_0^2 \left\langle F(x^*), x^* \right\rangle + \left\langle u^1, u^2 \right\rangle = 0.$$

Svi sabirci, po pretpostavkama, su nenegativni tako da moraju biti jednaki 0. Prema tome je

$$u_0^2 \left\langle F(x^*), x^* \right\rangle = 0.$$

Ako je $u_0 = 0$, onda zbog $\left\langle u^1, u^2\right\rangle = -\left\langle \frac{\partial F}{\partial x}(x^*)u^1, u^1\right\rangle \leqslant 0$, i $u^1 \geqslant \mathbf{0}, u^2 \geqslant \mathbf{0}$, imamo $\left(u_0, u^1, u^2\right) = \mathbf{0}$, što je nemoguće. Dakle, $u_0 \neq 0$ tako da je

$$\langle x^*, F(x^*)\rangle = 0.$$

Obratno: $\langle x^*, F(x^*)\rangle = 0, x \geqslant \mathbf{0},\ F(x) \geqslant \mathbf{0} \implies \langle x, F(x)\rangle \geqslant 0 = \langle x^*, F(x^*)\rangle$.

45. Dati skup $\mathcal{G}$ je ograničen ako zadatak $\max\ \{\|x\| : x \in \mathcal{G}\}$ ima rješenje. Birajući euklidsku normu dobijamo zadatak kvadratnog programiranja. Za normu $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, uvažavajući nenegativnost promjenljivih imamo zadatak linearnog programiranja: $\max\ \{\langle \mathbf{1}, x\rangle : \mathrm{A}x = b, x \geqslant \mathbf{0}\}$. Polazni problem ima rješenje ako je dopustivi skup dualnog zadatka neprazan. Dakle, $\mathcal{G}$ je ograničen ako i samo ako postoji $v \in \mathbb{R}^m$ takav da je $\mathrm{A}^\top v \geqslant \mathbf{1}$.

21. Za kanonski zadatak linearnog programiranja

$$\min\ c^\top x, \quad \mathrm{A}\, x \geqslant b,\ x \geqslant \mathbf{0}$$

dualan je

$$\max\ y^\top b, \quad \mathrm{A}^\top y \leqslant c,\ y \geqslant \mathbf{0}.$$

Ako su x^0, y^0 optimalne tačke datih problema, prema teoremi jake dualnosti mora biti

$$\langle c, x^0 \rangle = \langle y^0, b \rangle ,$$

tako da iz $A^\top y^0 \leqslant c$ redom slijedi

$$\langle A^\top y^0, x^0 \rangle \leqslant \langle c, x^0 \rangle , \quad \langle y^0, Ax^0 \rangle \leqslant \langle y^0, b \rangle , \quad \langle y^0, Ax^0 - b \rangle \leqslant 0.$$

Nejednakost suprotna posljednjoj je očigledna, pa je

$$\langle y^0, Ax^0 - b \rangle = 0.$$

Isto se postupa i za

$$\langle A^\top y^0 - c, x^0 \rangle = 0.$$

Obratno, uslov

$$\langle Ax^0 - b, y^0 \rangle = \langle A^\top y^0 - c, x^0 \rangle ,$$

i jednakost

$$\langle Ax^0, y^0 \rangle = \langle x^0, A^\top y^0 \rangle$$

povlače

$$\langle b, y^0 \rangle = \langle c, x^0 \rangle .$$

Dalje, iz $y^\top A \leqslant c^\top$ slijedi $y^\top Ax \leqslant c^\top x$, za sve $x \geqslant \mathbf{0}$, a zbog $Ax \geqslant b$ i $y \geqslant \mathbf{0}$ imamo $y^\top b \leqslant y^\top Ax$, odakle je

$$g(y) = y^\top b \leqslant y^\top Ax \leqslant c^\top x = f(x).$$

Specijalno, za sve dopustive x, y vrijedi

$$g(y) \leqslant f(x^0) = g(y^0), \quad f(x^0) = g(y^0) \leqslant f(x).$$

22. Smjenom $x_1 = -\xi_1$, $\xi_1 \geqslant 0$, $x_2 = \xi_2$, $x_3 = \xi_3$ zadatak postaje

$$\min \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + 0\xi_4$$

$$\begin{array}{rrrrl} -1\xi_1 - & 1\xi_2 + & 2\xi_3 + & 0\xi_4 & = 1 \\ -2\xi_1 + & 2\xi_2 + & 0\xi_3 + & 1\xi_4 & = 3 \end{array}$$

$$\xi_1 \geqslant 0, \ \xi_2 \geqslant 0, \ \xi_3 \geqslant 0, \ \xi_4 \geqslant 0.$$

Njemu je dualan sljedeći zadatak:

$$\max \eta_1 + 3\eta_2$$

$$\begin{array}{r} -1\eta_1 - 2\eta_2 \leqslant 1 \\ -1\eta_1 + 2\eta_2 \leqslant 2 \\ 2\eta_1 + 0\eta_2 \leqslant 3 \\ 0\eta_1 + 1\eta_2 \leqslant 0 \end{array}$$

On se lako rješava grafički i optimalna tačka je $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Jasno, minimalna vrijednost u polaznom problemu je $\frac{3}{2}$, a optimalni vektor se može naći, prema prethodnom zadatku, iz sistema

$$\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = \frac{3}{2}, \quad \left\langle \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Dobijamo $\xi^0 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$, te je $x^0 = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$.

23. Kako je $L(x,u) = -x_1 - x_2 + u(x_1^2 + x_2^2 - 2)$ KKT uslovi se svode na $\begin{pmatrix} -1 + 2ux_1 \\ -1 + 2ux_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u(x_1^2 + x_2^2 - 2) = 0, u \geqslant 0$. Jednostavno slijedi da je $u \neq 0$ i $x_1 = x_2$, pa je $x^* = (1,1)$ optimalno rješenje. Riješimo dualan zadatak:

$$\sup\ \varphi(u),\ u \geqslant 0,$$

gdje je $\varphi(u) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} L(x,u)$. Za $u > 0$, $x \mapsto L(x,u)$ je konveksna, pa se minimum dostiže u $\left(\frac{1}{2u}, \frac{1}{2u}\right)$. Dakle,

$$\varphi(u) = -2u - \frac{1}{2u},\ u > 0,$$

$u^* = \frac{1}{2}$ je rješenje dualnog zadatka, i vrijedi $f(1,1) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

24. Kako je dat problem konveksnog programiranja dualan problem, u Vulfovom smislu, glasi:

$$\max\ \{L(y,u) : \nabla_x L(y,u) = \mathbf{0},\ y \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}_+^{n+1}\}.$$

U ovom slučaju treba naći maksimum za

$$y_1^2 + \cdots + y_n^2 + u_0(n - y_1 - \cdots - y_n) - u_1 y_1 - \cdots - u_n y_n,$$

uz uslove $2y_i - u_i - u_0 = 0, (i = 1, ..., n),\ u \geqslant \mathbf{0}$. Ovaj problem se svodi na

$$\max\ \{-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(u_i - u_0)^2 + nu_0 : u_0 \geqslant 0,\ u_i \geqslant 0\}.$$

Vidimo da dualan zadatak nije jednostavniji od polaznog za koji KKT uslovi glase

$$2x_i - u_i - u_0 = 0,\ (i = \overline{1,n}),$$

$$u_i x_i = 0,\ u_0(n - x_1 - \cdots - x_n) = 0,\ u \geqslant \mathbf{0}.$$

Ako bismo za neki indeks i imali $u_i \neq 0$, onda je $x_i = 0$ i $u_0 = -u_i < 0$. Dakle, mora da bude $u = \mathbf{0}$, odakle je $x = \frac{u_0}{2} \cdot \mathbf{1}$. Sada iz $\mathbf{0} \notin \mathcal{G}$ izlazi $u_0 > 0$, pa dalje, zbog $u_0(n - \langle x, \mathbf{1}\rangle) = 0, \langle x, \mathbf{1}\rangle = \frac{u_0}{2}\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle$, slijedi

$$\langle x, \mathbf{1}\rangle = n, \quad u_0 = 2, \quad \text{i} \quad x^* = \mathbf{1}.$$

Rješenje dualnog zadatka je $(1, \mathbf{1})$.

25. Dualan zadatak glasi

$$\max\, y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n$$

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + \cdots + y_n &\leqslant 1 \\ y_2 + \cdots + y_n &\leqslant 2 \\ \cdots\cdots& \\ y_n &\leqslant n \\ y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0, ..., \ y_n &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Jasno, sve nejednakosti sem prve su stroge, pa prema Zadatku 46, zbog $\langle \mathrm{A}^\top y^0 - c,\ x^0\rangle = 0$, mora da bude $x_2^0 = \cdots = x_n^0 = 0$. Slijedi da je $x_1^0 = n \quad \text{i} \quad x^* = (n, 0, \ldots, 0)$.

27. $\nabla^2 f(x, y) = 2\begin{pmatrix} y-3 & x+y \\ x+y & x-3 \end{pmatrix}$. Za konveksnost funkcije f je potrebno da bude $y \geqslant 3, x \geqslant 3$. Tada je $(y-3)(x-3) < (x+y)^2$, pa $\nabla^2 f$ nije PsemiD matrica na $\mathbb{R}^2_+$.

S obzirom da je dopustivi skup $\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \ : 1 \leqslant x + y \leqslant 6\}$ kompaktan, postoji tačka minimuma date funkcije. Mi ćemo je naći među KKT tačkama, pošto je ispunjen Slejterov uslov. Imamo sistem

$$\begin{gathered} y^2 + 2xy - 6x - u_1 + u_2 - u_3 = 0, \\ x^2 + 2xy - 6y - u_1 + u_2 - u_4 = 0, \\ u_1(1 - x - y) = 0,\ u_2(x + y - 6) = 0,\ u_3 x = 0,\ u_4 y = 0. \end{gathered}$$

U slučaju da je $xy \neq 0$ dobijamo $u_3 = u_4 = 0$. Iz prve dvije jednačine je $y^2 - x^2 + 6(y - x) = 0$, odnosno $x = y$. Sistem postaje: $3x^2 - 6x - u_1 + u_2 = 0$, $u_1(1 - 2x) = 0$, $u_2(x - 3) = 0$, tako da KKT tačke su $(2, 2, 0, 0, 0, 0)$ i $(3, 3, 0, 9, 0, 0)$. Uzimajući da je $xy = 0$ dobijaju se i preostale KKT tačke: $(0, 6, 0, 36, 72, 0)$ i $(6, 0, 0, 36, 0, 72)$. Sada se može odrediti $f_{\min} = -108, \quad f_{\max} = 0$.

28. Dualan problem je $\sup\limits_{u \geqslant \mathbf{0}} \varphi(u)$, $\varphi(u) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^2} L(x, u)$.

Funkcija $x \mapsto L(x, u)$ je konveksna na $\mathbb{R}^2$ za svaki (fiksiran) vektor $u \geqslant \mathbf{0}$, pa se tačke minimuma, odnosno vrijednosti funkcije φ dobiju iz jednačine

$$\begin{pmatrix} -e^{-x_1} - u_1 + u_3 \\ -2e^{-x_2} - u_2 + u_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Za $-u_1+u_3>0$, i $-u_2+u_3>0$, dobijamo $x_1=-\ln(-u_1+u_3)$, $x_2=-\ln\dfrac{-u_2+u_3}{2}$. Dakle, $\mathrm{dom}\,(\varphi)=\{u\geqslant\mathbf{0}: u_3>\max\{u_1,u_2\}\}$, $\varphi(u)=(u_1-u_3)\ln(u_3-u_1)+(u_2-u_3)\ln(u_3-u_2)+\ln 2u_3$.

29. Ocjenu minimuma $f(x^*)$ možemo dobiti iz slabe teoreme dualnosti:

$$f(x)\geqslant\varphi(u),\quad \text{za sve}\quad (x,u)\in\mathcal{G}\times\mathbb{R}_+^{n+1}.$$

Kako je $u^0=\begin{pmatrix}0\\ \nabla f(x^0)\end{pmatrix}\geqslant\mathbf{0}$ dobijamo ocjenu $f(x^*)\geqslant\varphi(u^0)$, odnosno

$$f(x^*)\geqslant\inf_y L(y,u^0).$$

U našem slučaju, funkcija $y\mapsto L(y,u^0)$

$$L(y,u^0)=f(y)+\left\langle\begin{pmatrix}0\\ \nabla f(x^0)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\langle\mathbf{1},y\rangle-1\\ -y\end{pmatrix}\right\rangle=f(y)-\left\langle y,\nabla f(x^0)\right\rangle,$$

je konveksna, tako da ćemo za određivanje njenog infimuma iskoristiti Fermaovu teoremu. Imamo $\nabla_x L(y,u^0)=\nabla f(y)-\nabla f(x^0)$, odakle je očigledno $\nabla_x L(x^0,u^0)=\mathbf{0}$, i $\varphi(u^0)=L(x^0,u^0)$. Slijedi

$$f(x^*)\geqslant L(x^0,u^0)=f(x^0)-\left\langle x^0,\nabla f(x^0)\right\rangle.$$

Na drugi način, zbog $\nabla f(x^0)\geqslant\mathbf{0}$, imamo da je

$$\min_{x\in\sigma^n}\left\langle\nabla f(x^0),x\right\rangle=\left\langle\nabla f(x^0),\mathbf{0}\right\rangle=0.$$

Iz konveksnosti funkcije f na $\mathbb{R}^n$ slijedi $f(x)-f(x^0)\geqslant\left\langle\nabla f(x^0),x\right\rangle-\left\langle\nabla f(x^0),x^0\right\rangle$, pa za sve $x\in\sigma^n$ važi nejednakost $f(x)-f(x^0)\geqslant 0-\left\langle\nabla f(x^0),x^0\right\rangle$, odnosno $f(x)\geqslant f(x^0)-\left\langle\nabla f(x^0),x^0\right\rangle$,

30. Ovo je zadatak konveksnog programiranja sa nediferencijabilnom funkcijom cilja f, ali je dualan problem jednostavan. Lagranžova funkcija glasi

$$L(x,u_1,u_2)=\sum_{i=1}^n|x_i-a_i|+u_1\sum_{i=1}^n x_i-u_2\sum_{i=1}^n x_i,\quad x\in\mathbb{R}^n,\ u_1,u_2\geqslant 0.$$

Stavljajući $u=u_1-u_2\in\mathbb{R}$ dobijamo dobijamo funkciju jedne promjenljive definisanu na intervalu $[-1,1]$ sa $\varphi(u)=\inf_x L(x,u)=u\sum_{i=1}^n a_i$.
Zaista, ako je $x_i\neq a_i$, onda je

$$|x_i-a_i|+ux_i\geqslant ua_i,\ \text{što se svodi na}\quad u\frac{x_i-a_i}{|x_i-a_i|}\geqslant -1,$$

a tačno je za $|u| \leqslant 1$. Prema tome inf se dostiže za $x = a$. Za $u > 1$, uzimajući $x = (-\xi_1, ..., -\xi_n)$, $\xi_i > 0$ dobijamo

$$\sum_{i-1}^{n} |-\xi_i - a_i| + u \sum_{i-1}^{n} (-\xi_i) \leqslant (1-u) \sum_{i-1}^{n} \xi_i + \sum_{i=1}^{n} |a_i| \longrightarrow -\infty.$$

Dualan problem

$$\max \varphi(u), \quad -1 \leqslant u \leqslant 1,$$

ima rješenje

$$u^* = \operatorname{sgn} \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad \varphi(u^*) = \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right|.$$

Rješenje polaznog problema dobija se iz sistema jednačina

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i| = \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right|, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

31. Primalni problem nema rješenje, budući da na skupu

$$\mathcal{G} = \{x \in \mathcal{D} \; : \; g(x) = -x_1 \leqslant 0\} = [0, +\infty[\times [1, +\infty[$$

vrijedi

$$f(x) = x_1 + \frac{1}{x_2} > 0, \text{ i } \lim_{t \to \infty} f(0, t) = 0.$$

Znači, $\pi = 0$.
Funkcija f je konveksna, pa je odgovarajući dualan problem

$$\sup \varphi(u), \; u \in \mathbb{R}_+^n,$$

pri čemu je $\varphi(u) = \inf\limits_{x \in \mathcal{D}} L(x, u)$, $L(x, u) = \max \left\{0, x_1 + \dfrac{1}{x_2}\right\} - ux_1$. Sada je $\varphi(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ -\infty, & u > 1 \end{cases}$. Dakle, $\delta = \varphi(u^*)$, $u^* \in [0, 1]$.
Pošto za marginalnu funkciju p imamo $p(0) = \pi \in \mathbb{R}$, i dualan problem ima rješenje, to na osnovu jake teoreme dualnosti polazni problem je stabilan.

32. Marginalna funkcija je data sa $p(v) = \min\limits_{x \in \mathcal{G}(v)} f(x)$, gdje je $\mathcal{G}(v) = \{v \in \mathbb{R}^3 \; : \; x_1^2 + x_2^2 \leqslant v_1, -x_1 + x_2^2 \leqslant v_2\}$. Skup $\mathcal{G}(v)$ je prazan za $v_2 > \sqrt{v_1}$, pa je u tom slučaju $p(v) = +\infty$. Ostali dopustivi skupovi su konveksni i kompaktni, te linearna funkcija f ima minimum u njegovom vrhu. Dobija se

$$p(v_1, v_2) = \begin{cases} -\sqrt{v_1}, & v_1 + v_2 \leqslant -\frac{1}{4} \\ -\sqrt{\frac{-1-2v_2+\sqrt{1+4(v_1+v_2)}}{2}}, & -\frac{1}{4} - v_1 < v_2 < \sqrt{v_1} \\ 0, & v_2 = \sqrt{v_1} \\ +\infty, & v_2 > \sqrt{v_1} \end{cases}$$

Nije lako odrediti $\partial p(\mathbf{0})$. Zato ćemo za utvrđivanje stabilnosti iskoristiti činjenicu da konveksan problem koji ima rješenje x^* je stabilan ako i samo ako postoji u^* takav da je (x^*, u^*) KKT tačka. Ovdje je očigledno

$$x^* = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right),$$

dok za $u^* \geqslant \mathbf{0}$ mora da vrijedi $2x_1^* u_1^* + u_2^* = 0$, i $1 + 2x_1^* u_1^* - 2x_2^* u_2^* = 0$, što ne može biti. Dakle, ovaj problem nije stabilan .

LITERATURA

[**1**] V.M. Alekseev, E.M. Galeev, V.M. Tihomirov. *Sbornik zadač po optimizacii.* Nauka, Moskva, 1984.

[**2**] J.M. Borwein, A.S. Lewis. *Convex Analysis and Nonlinear Optimization.* Springer, New York, 2000.

[**4**] N. Cameron. *Introduction to Linear and Convex Programming.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

[**5**] K-H. Elster, R. Reinhardt, M. Schäuble, G. Donath. *Einführung in die nichtlineare optimierung.* Teubner, Leipzig, 1977.

[**6**] J. Jahn. *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization.* Springer, Berlin,1994.

[**7**] M. Jovanović. *Diferencijalni račun na* $\mathbb{R}^n$, *Konveksne funkcije, Ekstremi.* Prirodno-matematički fakultet, Banja Luka, 2001.

[**8**] I.L. Kalihman. *Sbornik zadač po matematičeskom programirovaniju.* Moskva, 1975.

[**9**] A.L. Peressini, F.E. Sullivan, J.J. Uhl. *The Mathematics of Nonlinear Programming.* Springer, 1988.

[**11**] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis.* Princeton, New Yersey, Princeton University Press, 1997.

[**12**] A. G. Suharev, A.V. Timohov, V.V. Fedorov. *Kurs metodov optimizaciji.* Nauka, Moskva, 1986.

[**13**] S. Vajda. *Theory of Linear and Non-linear Programming.* Longman, London. 1974.

[**14**] F. P. Vasilev. *Metodi Optimizacii.* Faktorial Press, Moskva, 2002.

[**15**] W. I. Zangwill. *Nonlinear Programming.* Prentice-Hall, New Jersey, 1969.