KONVEKSNA OPTIMIZACIJA

(zadaci)

Milan Jovanović

Osnovu ove zbirke čine zadaci sa ispita iz Matematičkog programiranja, predmeta koji se predaje na PMF BL od 1998\1999 školske godine.
To su zadaci označeni brojevima:
8,10,12,14,15,16,20,25,26,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,41,42,46,47,52 i 53.
Pridodati su i neki zadaci, koji ilustruju važnost nekih uslova (npr. regularnosti), kao i zadaci za koje su potrebni elementi subdiferencijalnog računa. Ovo je učinjeno stoga što, bez obzira na naziv ovaj kurs je posvećen konveksnom programiranju, sa neznatnim uopštenjima.

1. Dokazati da vrijedi

$$\mathrm{co}(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2) = \mathrm{co}\mathcal{S}_1 + \mathrm{co}\mathcal{S}_2.$$

$$\mathrm{co}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) = \bigcup_{0\le\lambda\le 1} (1-\lambda)\mathcal{C}_1 + \lambda\mathcal{C}_2.$$

$$\mathrm{co}(\mathcal{K}_1 \bigcup \mathcal{K}_2) = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2,$$

ako je $\mathbf{0} \in \mathcal{K}_1 \bigcap \mathcal{K}_2$.

2. Ako je $\mathcal{C}_1 \bigcap \mathcal{C}_2 = \emptyset$, $a \in \mathbb{R}^n$, onda

$$\mathcal{C}_1 \bigcap \mathrm{co}(\mathcal{C}_2 \bigcup \{a\}) = \emptyset,$$

ili

$$\mathcal{C}_2 \bigcap \mathrm{co}(\mathcal{C}_1 \bigcup \{a\}) = \emptyset.$$

3. Razdvojiti skupove :

$$\mathcal{C}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le 1\},$$

$$\mathcal{C}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + 1 \le x_n\}.$$

4. Odrediti konveksan zatvoren skup $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ takav da za sve $c \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\inf_{x\in\mathbb{C}} \langle c, x\rangle = -\|c\|.$$

5. Pokazati da skup $\mathrm{ext}\mathcal{C}$, gdje je

$$\mathcal{C} = \mathrm{co}(\mathcal{S} \bigcup \{e^1 + e^3, e^1 - e^3\}),$$

$$\mathcal{S} = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

nije zatvoren.

6. Odrediti konuse $\mathcal{V}, \mathcal{T}, \mathcal{K}$ za tačku

$$x^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

i skup $\mathcal{C}_1$ dat sa

$$(1 - x_1 - x_2)^3 \ge 0, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

odnosno $\mathcal{C}_2$, za koji je

$$x_1 + x_2 \le 1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

7. Naći normalan konus $\mathcal{N}(\mathcal{C}, x)$,

$$\mathcal{C} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{A}x = b \}.$$

A je $m \times n$ matrica, $b \in \mathbb{R}^m$.

8. Pokazati da je skup

$$\{(x, y) \in \mathcal{P} \mid x^2 + y^3 \ge x^3 + y^4\},$$

konveksan, ako je
$\mathcal{P} = [\frac{1}{3}, +\infty) \times [\frac{1}{2}, +\infty)$.

9. Pokazati da je funkcija

$$f(x) = (1 + \| x \|^2)^{\frac{p}{2}}$$

konveksna na $\mathbb{R}^n$, za $p \ge 1$.

10. Neka su $A(x)$, $G(x)$, $H(x)$ aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina koordinata tačke x pri čemu x redom pripada skupovima

$$\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n_+,\ \mathrm{int}\,\mathbb{R}^n_+.$$

Pokazati da su funkcije

$$A,\ G,\ H$$

konkavne.

11. Naći subdiferencijale funkcija n promjenljivih datih izrazima :

$$\max\{x_i : i = 1, ..., n\},$$

$$\max\{\,|\,x_i\,|\,: i = 1, ..., n\}.$$

12. Odrediti f^c ako je

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & -2 \leq x < 0 \\ x(x+2), & 0 \leq x \leq 2 \\ x - 2, & 2 \leq x \end{cases}$$

13 Za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1+x}, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 - 1, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

odrediti konjugovanu funkciju. Uporediti njihovu diferencijabilnost i konveksnost.

14. Za funkciju

$$f(x) = ||x| - 1|, x \in \mathbb{R}$$

naći

$$f^c,\ f^{cc},\ \partial f,\ \partial f^c.$$

15. Pokazati da je

$$f(x) = -\sqrt{x_1 x_2}$$

konveksna na $\mathbb{R}^2_+$ i naći njenu konjugovanu funkciju f^c.

16. Pokazati da je funkcija

$$f(x) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2}}$$

kvazikonveksna na $\mathcal{H}_-(e^1 + e^2, 1)$.

17. Odrediti konjugovanu funkciju za

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$f(x) = \max\{\ 0,\ \langle a, x\rangle + \alpha\}.$$

18. Neka gradijent konveksne funkcije

$$f\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

ispunjava Lipšicov uslov sa konstantom L. Pokazati da je

$$x \mapsto f^{\,c}(x) - \frac{1}{2L}\,\|x\|^{\,2}$$

konveksna funkcija na skupu

$$\mathcal{C} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n | \partial f^c(x) \neq \emptyset\}.$$

19. Neka je f pozitivno homogena funkcija na konveksnom konusu $\mathcal{K}$. Tada

a) f je konveksna ako i samo ako za sve $x, y \in \mathcal{K}$ vrijedi

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

b) f je konveksna ako je negativna i kvazikonveksna na $\mathcal{K}$.

20. Pokazati da je funkcija recipročna pozitivnoj, konkavnoj na $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ funkciji, na tom skupu konveksna. Ako je f pozitivna, konveksna na $\mathcal{C}$, onda je $\dfrac{1}{f}$ kvazikonkavna funkcija.

21. Neka je f diferencijabilna na $\mathbb{R}^n$. Tada je x^* tačka njenog globalnog minimuma ako i samo ako je

$$\triangledown f(x) = \mathbf{0},\ f(x) = f^{cc}(x).$$

22. Naka je f konveksna, subdiferencijabilna funkcija na konveksnom skupu $\mathcal{C}$. Pokazati da je vektor x^* rješenje problema

$$\min f(x), x \in \mathcal{C},$$

ako i samo ako vrijedi

$$\mathbf{0} \in \partial f(x^*) + \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(x^*).$$

23. Naći $\min f(x),\ x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i|,$$

pri čemu za date realne brojeve $a_1, ..., a_n$ važi $a_1 < ... < a_n$.

24. Ispitati uslove regularnosti problema:

$$(x_1+1)^2 + x_2^2 \longrightarrow \min$$

$$x \in \mathbb{R}^2,\ -x_1^3 + x_2^2 \leq 0.$$

25. Naći minimum funkcije

$$f(x) = -x_2$$

na skupu

$$\mathbb{R}^3_+ \cap \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{H}_-(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, 1).$$

26. Riješiti problem:

$$x_1^2 + 2\,x_2^2 + \cdots + n\,x_n^2 \to \min$$

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq 1,$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

27. Naći minimum funkcije

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \|x - v^i\|^2,\ x \in \mathcal{B}_1,$$

dok su $v^1, ..., v^m \in \mathbb{R}^n$ dati vektori.

28. Riješiti zadatak:

$$15\,x_1 + 48\,x_2 \to \min$$

$$\frac{5}{x_1} + \frac{9}{x_2} - \frac{17}{20} \leq 0, \quad x_1,\, x_2 > 0.$$

29. Naći $\min f(x)$

$$f(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\,x_1 - 2\,x_2}{x_1 + x_2},$$

pri uslovima: $x \in \mathbb{R}^2_+$,

$$x_1 + 3\,x_2 \leq 9, \quad 3\,x_1 + 4\,x_2 \geq 12.$$

30. Naći maksimum Vandermondove determinante, pri uslovima

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 3.$$

31. Odrediti sedlaste tačke Lagranžove funkcije pridružene problemu:

$$x_2 x_3 + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \to \min$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 \leq 4, \quad x_1,\, x_2,\, x_3 > 0.$$

32. Naći minimum funkcije

$$f(x) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{-2},\ x \in \mathbb{R}^4_+$$

$$\frac{x_3}{x_1} + \frac{x_4}{x_1} \leq 1, \quad \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_4}{x_3} \leq 1.$$

33. Riješiti zadatak nekonveksne minimizacije funkcije

$$f(x_1,x_2) = -x_1^2 - x_2$$

na skupu koji je dat sa

$$x_1^2 + (x_2-1)^2 \geq 1,$$

$$x_1 \geq -1,$$

$$(x_1+1)^2 + x_2^2 \geq 1.$$

34. Naći maksimum funkcije

$$f(x_1,x_2) = x_1 x_2$$

na konveksnom omotaču tačaka:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

35. Odrediti udaljenost tačke

$$T\,(\,2, 1, 5, 4\,)$$

od skupa

$$\{x \in \mathbb{R}^4 | x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4\}.$$

36. Naći projekciju tačke

$$T(0,1)$$

na poliedar dat sistemom nejednačina:

$$x_1 + 3\,x_2 \geq 3,$$

$$3\,x_1 + 2\,x_2 \geq 6,$$

$$-\,x_1 + x_2 \leq 1.$$

37. Riješiti zadatak razlomljenog programiranja

$$\min \frac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2 + 2},$$

pri uslovima

$$3x_1 + x_2 \geq 7, \;\; -x_1 + 4x_2 \leq 5,$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 17, \;\; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

38. Kvadratnu formu

$$2\,x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + x_2^2 - 10\,x_1 - 10\,x_2$$

minimizirati na skupu

$$\mathcal{B}_{\sqrt{5}} \bigcap \mathcal{H}_{-}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, 6\right).$$

39. Neka je $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferencijabilna, sa pozitivno definitnom Jakobijevom matricom. Pokazati da funkcija

$$f(x) = \langle x, F(x)\rangle,$$

pri uslovima $x \geq \mathbf{0}$, $F(x) \geq \mathbf{0}$, ima minimum u tački x^* ako i samo ako vrijedi

$$\langle x^*, F(x^*)\rangle = 0.$$

40. U terminima matematičkog programiranja opisati ograničenost poliedra

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n_+ \,|\, \mathrm{A}x = b\},$$

gdje je $b \in \mathbb{R}^m$.

41. Neka su x^0, y^0 dopustive tačke za kanonski LP i njegov dual. Tada su to optimalne tačke ako i samo ako je

$$\langle \mathrm{A}x^0 - b, y^0\rangle = \langle \mathrm{A}^\top y^0 - c, x^0\rangle = 0.$$

42. Formirati dualan za LP problem

$$\min -x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3,$$

pri uslovima

$$x_1 - x_2 + 2\,x_3 = 1,$$

$$2\,x_1 + x_2 \;\le 3,$$

$$x_1 \le 0,\; x_2 \ge 0,\; x_3 \ge 0,$$

pa ih riješiti.

43. Za problem minimizacije funkcije

$$f(x) = \|\,x\,\|^{\,2}, \quad x \in \mathbb{R}^n_+,$$

uz uslov

$$\langle \mathbf{1}, x\rangle \ge n,$$

odrediti dualan problem, pa ih riješiti.

44. Pomoću teorije dualnosti riješiti zadatak linearnog programiranja

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \to \min,$$

$$\begin{gathered} x_1 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ \cdots\cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \ge n \end{gathered}$$

$$x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0,\, \ldots,\, x_n \ge 0.$$

45. Ispitati konveksnost funkcije

$$f(x,y) = x\,y^2 + x^2\,y - 3\,x^2 - 3\,y^2,$$

na $\mathbb{R}^2_+$, pa naći njen minimum uz dodatni uslov

$$1 \le x + y \le 6,$$

i napisati dualan problem.

46. Odrediti dualan problem za

$$\min\, e^{-x_1} + 2e^{-x_2},$$

$$x_1 + x_2 \le 2,\; x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0.$$

47. Neka je f konveksna funkcija i

$$\nabla f(x^0) \ge \mathbf{0} \quad \text{za neki} \quad x^0 \in \mathbb{R}^n.$$

Pomoću tih vektora odrediti donju granicu vrijednosti π u problemu

$$\min f(x), \quad \langle \mathbf{1},\, x\rangle \le 1,\; x \;\ge\; \mathbf{0}.$$

Može li f da bude odozdo neograničena na $\mathbb{R}^n_+$?

48. Odrediti dualan problem za

$$\min f(x), \quad x \in \mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Funkcija f je konveksna na zatvorenom konveksnom konusu $\mathcal{K}$.

49. Naći minimimum funkcije

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i|, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

pri uslovu

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le 1.$

50. Analizirati problem:

$$\min f(x), \quad x \in \mathcal{G},$$

$$f(x) = \max\{\, 0,\, x_1 + \frac{1}{x_2}\;\},$$

$$\mathcal{G} = \{x \in \mathcal{D} \mid -x_1 \le 0\},$$

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \ge 1\},$$

i njegov dualan problem.

51. Ispitati stabilnost, naći π i δ za problem minimizacije (P) gdje je

$$\mathcal{D}_F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2 | x_1 = -y_1\}$$

i

$$F(x, y) = \max\{-1, -\sqrt{-x_2\, y_1}\,\}.$$

52. Za problem minimizacije u kom je

$$f(x_1, x_2) = e^{-x_2},$$

$$g(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1 \leq 0$$

odrediti marginalnu funkciju i ispitati stabilnost.

53. Odrediti marginalnu funkciju problema:

$$\min f(x_1, x_2) = x_2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \quad x_1 - x_2^2 \geq 0.$$

Ispitati njegovu stabilnost.

54. Naći $\partial p^c(\mathbf{0})$ za problem

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min,$$

ako je dopustivi skup dat sa

$$x_1^2 - 1 \leq 0, \quad x_2^2 - 1 \leq 0,$$

$$x_1 + x_2 \leq 0.$$

RJEŠENJA

1. a) Iz relacije $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 \subseteq \mathrm{co}\mathcal{S}_1 + \mathrm{co}\mathcal{S}_2$ i konveksnosti skupa $\mathrm{co}\mathcal{S}_1 + \mathrm{co}\mathcal{S}_2$ slijedi
$$\mathrm{co}(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2) \subseteq \mathrm{co}\mathcal{S}_1 + \mathrm{co}\mathcal{S}_2.$$
Neka je sada $x \in \mathrm{co}\mathcal{S}_1$, tj. $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i, p \in \mathbb{N}, x^i \in \mathcal{S}_1, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$
Iz Karateodorijeve teoreme slijedi da je $x + \mathrm{co}\mathcal{S} \subseteq \mathrm{co}(x + \mathcal{S})$ tako da za proizvoljan $i \in \{1, ..., p\}$ imamo $x^i + \mathrm{co}\mathcal{S}_2 \subseteq \mathrm{co}(x^i + \mathcal{S}_2) \subseteq \mathrm{co}(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2)$. Odavde je
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i + \lambda_1 \mathrm{co}\mathcal{S}_2 + \cdots + \lambda_p \mathrm{co}\mathcal{S}_2 \subseteq \lambda_1 \mathrm{co}(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2) + \cdots + \lambda_p \mathrm{co}(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2),$$
odnosno
$$x + \mathrm{co}\mathcal{S}_2 \subseteq \mathrm{co}(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2),$$
za sve $x \in \mathrm{co}\mathcal{S}_1$, što znači da je
$$\mathrm{co}\mathcal{S}_1 + \mathrm{co}\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2.$$

b) Neka je $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i, \mathcal{J}_k = \{i \,|x^i \in \mathcal{C}_k\}, s_k = \sum_{i \in \mathcal{J}_k} \lambda_i, k = 1, 2.$
Uzmimo da je $0 < s_1 < 1$. Tada je
$$x = s_1 \sum_{i \in \mathcal{J}_1} \frac{\lambda_i}{s_1} x^i + s_2 \sum_{i \in \mathcal{J}_2} \frac{\lambda_i}{s_2} x^i \in s_1 \mathcal{C}_1 + s_2 \mathcal{C}_2,\ s_1 + s_2 = 1.$$
Slučajevi $s_1 \in \{0, 1\}$, kao i obratna inkluzija su trivijalni.
c) Ako je $\mathbf{0} \in \mathcal{K}$ onda je $\alpha\mathcal{K} = \mathcal{K}$ za sve $\alpha \geq 0$. Prema prethodnom imamo
$$\mathrm{co}(\mathcal{K}_1 \bigcup \mathcal{K}_2) = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} (1 - \lambda)\mathcal{K}_1 + \lambda\mathcal{K}_2 = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2.$$
Inače tvrđenje ne vrijedi. Za konuse $\mathcal{K}_1 = \{0\} \times \mathbb{R}_+, \mathcal{K}_2 = \{1\} \times \mathbb{R}_+$ vrijedi $\mathrm{co}(\mathcal{K}_1 \bigcup \mathcal{K}_2) = [0, 1] \times \mathbb{R}_+$, dok je $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2$.

2. Ako je $a \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, stvar je jasna:
$$a \in \mathcal{C}_1 \Rightarrow \mathcal{C}_2 \cap \mathrm{co}(\mathcal{C}_1 \cup \{a\}) = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset.$$
U protivnom, neka su oba presjeka neprazna. Za $x \in \mathcal{C}_1 \bigcap \mathrm{co}(\mathcal{C}_2 \bigcup \{a\})$, prema prethodnom zadatku, postoji tačka $c^2 \in \mathcal{C}_2$ takva da je $x \in [a, c^2]$.

Slično za $y \in \mathcal{C}_2 \bigcap \mathrm{co}(\mathcal{C}_1 \bigcup \{a\})$ postoji $c^1 \in \mathcal{C}_1$ tako da je $y \in [a, c^1]$. Skup $[x, c^1] \cap [c^2, y]$ je neprazan podskup skupa $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

3. Hiperravan $\mathcal{H}(e^n; 1)$ razdvaja date skupove, pošto za $x \in \mathcal{C}_1$ vrijedi

$$\langle e^n, x\rangle \leq \|e^n\|\|x\| \leq 1,$$

dok za $x \in \mathcal{C}_2$ imamo

$$\langle e^n, x\rangle = x_n \geq 1 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \geq 1.$$

Ovdje je $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \neq \emptyset$, ali $(\mathrm{int}\ \mathcal{C}_1) \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$. $\Box$

4. Dati uslov se može zapisati u ekvivalentnom obliku

$$\sup_{x \in \mathcal{C}} \langle c, x\rangle = \|c\|,$$

za sve $c \in \mathbb{R}^n$. Odavde je , za proizvoljan $x \in \mathcal{C}$ i sve vektore c,

$$\langle c, x\rangle \leq \|c\|,$$

pa uzimajući specijalno $c = x$ slijedi

$$\langle x, x\rangle \leq \|x\|,$$

što znači da je

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}(\mathbf{0}, 1).$$

Pokažimo da je tačna i suprotna inkluzija. Ukoliko postoji

$$x^0 \notin C, \|x^0\| \leq 1,$$

onda na osnovu teoreme stroge separacije postoje i vektor $c_0 \neq \mathbf{0}$ i broj γ_0 takvi da vrijedi

$$\langle c_0, x^0\rangle > \gamma_0 > \langle c_0, x\rangle, \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

Odavde je tada

$$\sup_{x \in \mathcal{C}} \langle c_0, x\rangle \leq \gamma_0 < \langle c_0, x^0\rangle \leq \|c_0\|\|x^0\| \leq \|c_0\|.$$

Ovo ne može po uslovima zadatka, tako da je $\mathcal{C} = \mathcal{K}(\mathbf{0}, 1)$.

5.
$$\operatorname{ext}\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \bigcup \left(\mathcal{S} \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right)$$
nije zatvoren skup.

6. Kako je $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$, to je u oba slučaja $\mathcal{V} = \mathcal{T} = \{v \in \mathbb{R}^2 | v_2 \leq -v_1\}$. Međutim, linearizujući konusi su različiti. Za skup $\mathcal{C}_1$ prvo ograničenje je aktivno, a gradijent u x^0 je 0 vektor. Slijedi da je $\mathcal{K}_<(x^0) = \emptyset$, a $\mathcal{K}(x^0) = \mathbb{R}^2$.
U drugom slučaju je
$\mathcal{K}_<(x^0) = \mathrm{int}\mathcal{K}(x^0), \;\; \mathcal{K}(x^0) = \{v \in \mathbb{R}^2 | \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \rangle \leq \mathbf{0}\} = \mathcal{V}.$

7. Uzmimo da je $r(\mathrm{A}) = m, g_i(x) = \langle a_{i*}, x\rangle - b_i$ i tačka $x^0 \in \mathbb{R}^n$ takva da je $\mathcal{J}(x^0) = \{i | \langle a_{i*}, x^0\rangle = b_i\}$, neprazan skup.
Pošto je skup vrsta $a_{i*}, i \in \mathcal{J}(x^0)$ linearno nezavisan, na osnovu Gordan-Štimkeove teoreme, skup $\{v | \langle a_{i*}, v\rangle < 0, i \in \mathcal{J}(x^0)\}$ je neprazan, tako da je $\mathcal{T}(x^0) = \mathcal{K}(x^0)$.
Sada, za normalan konus vrijedi
$$y \in \mathcal{N}(x^0) \Leftrightarrow \langle y, v\rangle \leq 0 \;\forall v \in \mathcal{K}(x^0).$$
Posljednja formula znači da treba naći one y za koje nije rješivo
$$\langle a_{i,*}, v\rangle \leq 0, \;\forall i \in \mathcal{J}(x^0) \;\Rightarrow \langle y, v\rangle > 0.$$
Prema Farkaševoj teoremi postoji $z \geq \mathbf{0}, z_i = 0\,(i \notin \mathcal{J}(x^0))$ takav da je $y = \mathrm{A}^\top z$, odakle je
$$\mathcal{N}(x^0) = \mathrm{cone}\{a_{i*}, i \in \mathcal{J}(x^0)\}.$$

8. Za funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = -x^2 + x^3 - y^3 + y^4$ vrijedi
$$\langle \nabla^2 f(x)v, \, v\rangle = 2\langle \begin{bmatrix} 3x-1 & 0 \\ 0 & 6y^2 - 3y \end{bmatrix} v, v\rangle = 2(3x-1)v_1^2 + 6(2y^2 - y)v_2^2.$$

Imamo da je $\nabla^2 f$ PsemiD matrica na $[\frac{1}{3}, +\infty) \times [\frac{1}{2}, +\infty)$. Znači f je konveksna na tom skupu, pa njen nivoski skup

$$\left\{ (x, y) \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right) \times \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \middle| \, f(x, y) \leq 0 \right\},$$

odnosno dati skup, je konveksan. □

9. Za Heseovu matricu date funkcije f vrijedi

$$\langle \nabla^2 f(x)v, v\rangle = p(1 + \| x \|^2)^{\frac{p-2}{2}}(1 + (p-1)\|x\|^2)\|v\|^2 \geq 0,$$

za sve $x, v \in \mathbb{R}^n$.
Međutim konveksnost slijedi i iz činjenice da je kompozicija konveksne funkcije sa rastućom konveksnom funkcijom takođe konveksna. Ovdje je prva funkcija norma, a druga

$$t \to (1 + t^2)^{\frac{p}{2}}.$$

10. Sa $A(x) = \dfrac{1}{n}\langle \mathbf{1}, x\rangle$ je na $\mathbb{R}^n$ data linearna, pa samim tim i konkavna funkcija. $x \to G(x)$ je poseban slučaj Kob - Daglasove funkcije, pri $\alpha = 1, \alpha_i = \frac{1}{n}, i = \overline{1, n}$, a ona je tada konkavna. Za funkciju

$$\mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \ni x \mapsto H(x) = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}$$

vrijedi

$$\nabla^2 H(x) = \frac{2}{n^2} H^3(x) \begin{bmatrix} x_1^{-2} \\ \vdots \\ x_n^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{-2} & ,..., & x_n^{-2} \end{bmatrix} - \frac{2}{n} H^2(x) \mathrm{D}iag[x_1^{-3}, ..., x_n^{-3}].$$

Nejednakost iz uslova negativne definitnosti

$$\langle \nabla^2 H(x)v, v\rangle \leq 0,$$

za sve $v \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ ekvivalentna je sa

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{x_i^2} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i^2}{x_i^3},$$

a ova je najednakost Koši- Bunjakovskog za vektore

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x_1}}, ..., \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right], \left[\frac{v_1}{\sqrt{x_1^3}}, ..., \frac{v_n}{\sqrt{x_n^3}}\right].$$

11. Neka je $f(x) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} f_i(x)$, gdje su f_i konveksne, onda je

$$\partial f(x) = \text{co} \bigcup_{i \in \mathcal{J}(x)} \partial f_i(x), \;\; \mathcal{J}(x) = \{i | f_i(x) = f(x)\}.$$

U prvom slučaju je $f_i(x) = x_i$, Kako je $\nabla f_i(x) = e^i$ subdiferencijal se lako određuje. Tako je

$$\partial f(\mathbf{0}) = \text{co}\{e^1, ..., e^n\} = \sigma^n.$$

Za funkciju $f(x) = \|x\|_\infty$ vrijedi

$$\partial f(\mathbf{0}) = \text{co} \bigcup_{i=1}^{n} [-e^i, e^i] = \mathcal{B}_1(\mathbf{0}, 1).$$

12. Za $y > 1$ imamo

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (xy - f(x)) \geq \sup_{x > 2} (xy - f(x)) = \sup_{x > 2} (2 + x(y-1)) = +\infty.$$

Uzmimo da je $y \leq 1$. Maksimum izraza $2 + x(y-1)$ sada je $2y$.
Preostale mogućnosti za

$$xy - f(x)$$

jesu

$$xy + \frac{x}{2}, \quad -2 \leq x < 0,$$

sa maksimumom 0, ili $-2(y + \frac{1}{2})$, i

$$xy - x(2-x), \quad 0 \leq x < 2,$$

pri čemu za posljednji izraz, tj. za $p(x) = x^2 + (y-2)x$ vrijedi $p(0) = 0, p(2) = 2y$.
Poredeći ove vrijednosti zaključujemo da je

$$f^c(y) = \begin{cases} -2y - 1, & y \leq -\frac{1}{2} \\ 0, & -\frac{1}{2} \leq y \leq 0 \\ 2y, & 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

13.

$$f^c(y) = \begin{cases} -y - \dfrac{1}{4y}, & y \leq -\frac{1}{2} \\ 1, & -\frac{1}{2} \leq y \leq 0 \\ 1 + \dfrac{y^2}{4}, & 0 \leq y \leq 2 \\ y, & y \geq 2. \end{cases}$$

Možemo uočiti da je f strogo konveksna funkcija, ali nije diferencijabilna. Njena konjugovana funkcija je diferencijabilna, ali nije strogo konveksna. Uopšte vrijedi da stroga konveksnost funkcije f povlači diferencijabilnost funkcije f^c.

14. Konjugovana funkcija f^c može se dobiti direktno. Međutim, uočimo da je

$$f = f_1 \wedge f_2,$$

gdje je

$$f_1(x) = |x-1|, \quad f_2(x) = |x+1|.$$

Pri tome je

$$\mathcal{D}(f_1^c) = \mathcal{D}(f_2^c) = [-1,1], \quad f_1^c(y) = y, \quad f_2^c(y) = -y.$$

Sada, zbog

$$(f_1 \wedge f_2)^c = f_1^c \vee f_2^c,$$

imamo

$$f^c(y) = \max\{-y, y\} = |y|, \quad y \in [-1,1].$$

Dalje, $f^{cc}(x) = 0$ na intervalu $[-1,1]$, a za ostale vrijednosti je $f^{cc} = f$. Funkcija f je diferencijabilna, osim u tačkama: -1, 0, 1. Na primjer,

$$\partial f(1) = [f'_{-}(1), f'_{+}(1)] = [0,1],$$

dok je

$$\partial f(0) = \emptyset.$$

15. Za konveksnost ove funkcije vidjeti zadatak 10., uz

$$\alpha = -1, n = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}.$$

Sada, pošto je f pozitivno homogena funkcija imamo

$$f^c(y) = 0 \quad \text{na} \quad \mathcal{D}(f^c).$$

Preostaje da odredimo njen domen, tj. skup

$$\{y \in \mathbb{R}^2 | \langle y, x\rangle \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}^2_+\}.$$

Dakle, za sve $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ i $y = (y_1, y_2)$ treba da vrijedi

$$y_1x_1 + y_2x_2 \leq -\sqrt{x_1x_2}.$$

Mora biti $y_1 < 0, y_2 < 0$, pa uzimajući $y_1 = y_2 = -x_1,\ x_1 = x_2$
izlazi $-2y_1^2 \leq y_1$,tj. $-2y_1 \geq 1$. Isto je i za drugu koordinatu, pa slijedi

$$y_1y_2 \geq \frac{1}{4}.$$

Neka su sada y_1, y_2 negativni i $y_1y_2 \geq \frac{1}{4}$. Imamo

$$2\frac{(-y_1)x_1 + (-y_2)x_2}{2} \geq 2\sqrt{(-y_1)(-y_2)x_1x_2} \geq \sqrt{x_1x_2},$$

ili

$$y_1x_1 + y_2x_2 \leq -\sqrt{x_1x_2}.$$

Prema tome dobijamo da je

$$f^c(y) = \begin{cases} 0, & y_1 < 0, y_2 < 0, 4\,y_1y_2 \geq 1 \\ +\infty, & \text{inače} \end{cases}$$

16. Za kvazikonveksnost funkcije f potrebna je i dovoljna konveksnost svakog nivoskog skupa

$$\mathcal{L}_\alpha = \{x \in \mathcal{H}_- | f(x) \leq \alpha\}.$$

Na datom poluprostoru $\mathcal{H}_- = \mathcal{H}_-(e^1 + e^2, 1)$ je $0 \leq f(x) \leq 1$, tako da odmah vidimo sljedeće:

$$\mathcal{L}_\alpha = \emptyset, \alpha < 0, \quad \mathcal{L}_\alpha = \{\mathbf{0}\}, \alpha = 0, \quad \mathcal{L}_\alpha = \mathcal{H}_-, \alpha \geq 1.$$

Za $0 < \alpha < 1$ vrijedi

$$\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{H}_- \bigcap \mathcal{B}(x^\beta, r_\beta), \quad x^\beta = \begin{bmatrix} -\beta \\ -\beta \end{bmatrix}, \quad r_\beta = \sqrt{2\beta(1+\beta)}, \quad \beta = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2},$$

$$\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{H}_- \bigcap \mathcal{B}(\begin{bmatrix} -\beta \\ -\beta \end{bmatrix}, \sqrt{2\beta(1+\beta)}), \quad \beta = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2},$$

budući da je

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2} \leq \alpha^2$$

ekvivalentno sa

$$x_1^2 + x_2^2 + 2\beta x_1 + 2\beta x_2 \leq 2\beta.$$

17. U slučaju da je $a = \mathbf{0}$ funkcija f je konstantna, pa je

$$D(f^c) = \{\mathbf{0}\}, \quad \text{i} \quad f^c(\mathbf{0}) = -\max\{0, \alpha\}.$$

Uzmimo da je $a \neq \mathbf{0}$, pri čemu je, na primjer $a_1 \neq 0$.
Za $\quad y \in [\mathbf{0}, a], \quad$ tj. za $\quad y = \lambda a, \quad$ gdje je $\quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad$ vrijedi

$$\sup_x \{\langle \lambda a, x\rangle - f(x)\} \leq \max\{ \sup_{\langle a,x\rangle \leq -\alpha} \lambda\langle a, x\rangle, \sup_{\langle a,x\rangle \geq -\alpha} (\lambda - 1)\langle a, x\rangle - \alpha\} = -\lambda\alpha.$$

Dakle, $\quad [\mathbf{0}, a] \subseteq D(f^c), \quad$ a kako za $\quad x^1 = \dfrac{-\alpha}{a^1} e^1 \quad$ vrijedi

$$\langle \lambda a, x^1\rangle - f(x^1) = -\lambda\alpha,$$

to je

$$f^c(\lambda a) = -\lambda\alpha.$$

Dokažimo još da je

$$D(f^c) = [\mathbf{0}, a].$$

Neka je sada $y \notin [\mathbf{0}, a]$. Tačka y može se strogo razdvojiti od posmatranog intervala. Preciznije, prema teoremi stroge separacije postoji vektor $c \neq \mathbf{0}$ takav da je

$$\langle c, y\rangle > \langle c, \lambda a\rangle \quad \text{za sve} \quad \lambda \in [0, 1].$$

Odavde, uzimajući $\lambda = 0$, pa $\lambda = 1$ dobijamo

$$\langle c, y\rangle > 0, \quad \text{i} \quad \langle c, y\rangle > \langle c, a\rangle + \frac{\alpha}{t},$$

za sve vrijednosti t veće od nekog t_0. Sada je

$$\sup_x \{\langle y, x\rangle - f(x)\} \geq \sup_{t>0} \{\langle y, tc\rangle - f(tc)\} \geq \sup_{t>t_0} t\{\langle y, c\rangle - \max\{0, \langle a, c\rangle + \frac{\alpha}{t}\}\} = +\infty.$$

18. Neka su $y, y^0 \in \mathcal{C}$, i neka je $x^0 \in \partial f^c(y^0)$. Tada je

$$y^0 \in \partial f(x^0), \quad \text{tj.} \quad y^0 = \nabla f(x^0).$$

Za funkciju f vrijedi nejednakost

$$f(x) \leq f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x - x^0 \rangle + \frac{L}{2}\|x - x^0\|^2.$$

Iz nje, koristeći formulu $\quad f(x^0) + f^c(y^0) = \langle x^0, y^0 \rangle \quad$ dobijamo

$$\langle y, x \rangle - f(x) \geq f^c(y^0) + \langle y - y^0, x \rangle - \frac{L}{2}\|x - x^0\|^2.$$

Dalje je

$$\sup_x\{\langle y, x \rangle - f(x)\} \geq f^c(y^0) + \sup_x\{\langle y - y^0, x \rangle - \frac{L}{2}\|x - x^0\|^2\}.$$

Stavljajući da je

$$q(x) = \frac{L}{2}\|x - x^0\|^2,$$

imamo

$$f^c(y) \geq f^c(y^1) + q^c(y - y^0).$$

Kako je

$$q^c(y) = \frac{1}{2L}\| y \|^2 + \langle y, x^0 \rangle,$$

izlazi da je za sve $y \in \mathcal{C}$

$$f^c(y) \geq f^c(y^0) + \langle x^0, y - y^0 \rangle + \frac{1}{2L}\|y - y^0\|^2.$$

Ova nejednakost je isto što i

$$f^c(y) - \frac{1}{2L}\|y\|^2 \geq f^c(y^0) - \frac{1}{2L}\|y^0\|^2 + \langle x^0 - \frac{1}{L}y^0, y - y^0 \rangle,$$

tako da posmatrana funkcija ima subgradijent u tački y^0.
Sada je dovoljno iskoristiti činjenicu da subdiferencijabilnost funkcije u svakoj tački skupa povlači njenu konveksnost.

19. a) Iz konveksnosti i homogenosti slijedi

$$f(x^1 + x^2) = f(\frac{2x^1 + 2x^2}{2}) \leq \frac{f(2x^1) + 2f(x^2)}{2} = f(x^1) + f(x^2).$$

Obratno je, za sve $x^1, x^2 \in \mathcal{K}, \lambda \in [0,1]$

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) \leq f((1-\lambda)x^1) + f(\lambda x^2) = \\ = (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2). \end{aligned}$$

b) Pretpostavimo da je f kvazikonveksna, homogena ali da nije konveksna. Prema prethodnom tvrđenju, za neke $x^1, x^2 \in \mathcal{K}$ vrijedi

$$f(x^1 + x^2) > f(x^1) + f(x^2).$$

Uzmimo da je , na primjer

$$f(x^1) \geq f(x^2).$$

Kako je

$$f(\frac{f(x^1)}{f(x^2)}x^2) = \frac{f(x^1)}{f(x^2)}f(x^2) = f(x^1),$$

nivoskom skupu

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathcal{K} | f(x) \leq f(x^1)\}$$

pripadaju tačke

$$x^1, \quad \text{i} \quad \frac{f(x^1)}{f(x^2)}x^2.$$

Zbog kvazikonveksnosti funkcije f skup $\mathcal{L}$ je konveksan, pa mora da bude i

$$x^0 = \frac{f(x^1)}{f(x^1)+f(x^2)}x^1 + \frac{f(x^2)}{f(x^1)+f(x^2)}\frac{f(x^1)}{f(x^2)}x^2 \in \mathcal{L}.$$

Sada imamo da je

$$f(x^0) \leq \max\{f(x^1), f(x^2)\} = f(x^1).$$

Međutim, isto tako je

$$f(x^0) = f(\frac{f(x^1)}{f(x^1)+f(x^2)}(x^1 + x^2)) = \frac{f(x^1)}{f(x^1)+f(x^2)}f(x^1 + x^2) > f(x^1).$$

Kontradikcija.

20. Budući da je

$$t \mapsto \frac{1}{t}, \quad t > 0$$

konveksna funkcija, imamo da za sve $t_1, t_2 > 0, \lambda \in [0,1]$ vrijedi

$$\frac{1}{(1-\lambda)t_1 + \lambda t_2} \leq \frac{1-\lambda}{t_1} + \frac{\lambda}{t_2},$$

a, zbog konkavnosti funkcije f je

$$f(x^\lambda) \geq (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2)$$

za sve $\quad x^1, x^2 \in \mathcal{C}, \quad$ pri čemu je $\quad x^\lambda = (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2$. Koristeći ove dvije nejednakosti, dobijamo

$$g(x^\lambda) = \frac{1}{f(x^\lambda)} \leq \frac{1}{(1-\lambda)f(x^1) + \lambda\, f(x^2)} \leq \frac{1-\lambda}{f(x^1)} + \frac{\lambda}{f(x^2)} = (1-\lambda)g(x^1) + \lambda\, g(x^2),$$

tako da je funkcija

$$g = \frac{1}{f}$$

konveksna. Uočimo da konveksnost i konkavnost ne mogu da zamjene uloge. Na primjer $f(x) = x^2 + 1$ je konveksna funkcija na $\mathbb{R}$, ali $\frac{1}{f}$ nije konkavna.
Možemo da utvrdimo jedino da je $\frac{1}{f}$ kvazikonkavna. Zaista, neka je f konveksna i $\alpha > 0$. Tada je $\alpha \cdot f$ konveksna, pa je skup

$$\{x \in \mathcal{C} | \alpha \cdot f(x) \leq 1\},$$

odnosno

$$\{x \in \mathcal{C} | g(x) \geq \alpha\}$$

konveksan skup. Za $\alpha \leq 0$ nivoski skup je $\mathcal{C}$.

21. Neka je x^* tačka minimuma funkcije f, koja je u njoj diferencijabilna. Uslov $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$ je poznat. Dalje, kako je uvijek $\quad f^{cc} = \overline{f} \leq f, \quad$ to je i

$$f^{cc}(x^*) \leq f(x^*).$$

Konstantna funkcija

$$a : x \to f(x^*)$$

je afina minoranta funkcije f, pa je $\quad a \leq \overline{f}, \quad$ i specijalno vrijedi

$$f(x^*) \leq \overline{f}(x^*),$$

odnosno

$$f(x^*) \leq f^{cc}(x^*).$$

Pretpostavimo sada da je

$$\nabla f(x^*) = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad f(x^*) = f^{cc}(x^*),$$

pa dokažimo da je x^* tačka minimuma funkcije f^{cc}. Tada će zbog

$$f(x^*) = f^{cc}(x^*) \leq f^{cc}(x) \leq f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

x^* da bude tačka minimuma funkcije f. Dalje, pošto je f^{cc} konveksna funkcija dosta je dokazati da je njen gradijent u x^* nula vektor. Dakle, za $t > 0$ vrijedi

$$\frac{f^{cc}(x^* + te^k) - f^{cc}(x^*)}{t} \leq \frac{f(x^* + te^k) - f(x^*)}{t}.$$

Odavde , na osnovu pretpostavke $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$ dobijamo

$$(f^{cc})'_+(x^*, e^k) \leq 0.$$

Isto je i za pravac $-e^k$, te za sve k=1,...,n vrijedi

$$0 \leq (-f^{cc})'_+(x^*, -e^k) \leq (f^{cc})'_+(x^*, e^k) \leq 0,$$

odakle slijedi

$$\nabla f^{cc}(x^*) = \mathbf{0}.$$

22. Neka je $\mathbf{0} \in \partial f(x^*) + \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(x^*)$. Tada postoji

$$u \in \partial f(x^*),$$

takav da je

$$-u \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(x^*).$$

S jedne strane za sve $x \in \mathcal{C}$ je

$$f(x) - f(x^*) \geq \langle u, x - x^* \rangle,$$

a sa druge, zbog

$$x - x^* \in \mathcal{C} - x^* \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{C}}(x^*)$$

slijedi

$$\langle -u, x - x^* \rangle \leq 0,$$

tj.

$$\langle u, x - x^* \rangle \geq 0,$$

tako da imamo

$$f(x) - f(x^*) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

Obratno, neka je x^* tačka minimuma funkcije f na $\mathcal{C}$. To možemo zapisati na sljedeći način

$$f(x) - f(x^*) \geq \langle \mathbf{0}, x - x^* \rangle \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

Prema tome vrijedi $\quad \mathbf{0} \in \partial f(x^*), \quad$ a još je $\quad \mathbf{0} \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(x^*).$

23. Data funkcija je konveksna, ali nije diferencijabilna pa ćemo koristiti sljedeće:
$$f(x^*) = \min f(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \partial f(x^*)$$
Uzmimo da je $f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $f_k(x) = |x - a_k|$. Tada je $\partial f(x) = \sum_{k=1}^{n} \partial f_k(x)$, gdje je
$$\partial f_k(x) = \begin{cases} \{-1\}, & x < a_k \\ [-1,1], & x = a_k \\ \{1\}, & x > a_k. \end{cases}$$
Sada se dobija da je
$$\partial f(a_k) = [2k-n-2, 2k-n], \ \partial f(x) = \{2k-n\}, \text{ za } a_k < x < a_{k+1}.$$
U slučaju da je n neparan vrijedi
$$\partial f(a_{\frac{n+1}{2}}) = [-1,1],$$
dok pri parnom n imamo
$$\partial f(x) = \{0\}, \ x \in (a_{\frac{n}{2}}, a_{\frac{n}{2}+1}), \ \partial f(a_{\frac{n}{2}}) = [-2,0], \text{ i } \partial f(a_{\frac{n}{2}+1}) = [0,2].$$
U svim ostalim slučajevima 0 nije u subdiferencijalu. Dakle, za neparan n je $x^* = a_{\frac{n+1}{2}}$, a za parne vrijednosti skup tačaka minimuma je $[a_{\frac{n}{2}}, a_{\frac{n}{2}+1}]$.

24. Očigledno, rješenje zadatka je $x^* = \mathbf{0}$, ali KKT uslovi nisu ispunjeni budući da
$$\nabla f(x^*) + u\nabla g(x^*) = \mathbf{0}$$
postaje
$$2e^1 + u \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$
Nijedan od uslova regularnosti ne vrijedi, pošto u Fric Džonovoj teoremi jedino za $u_0 = 0$ imamo
$$u_0 \nabla f(x^*) + u\nabla g(x^*) = \mathbf{0}.$$
Na primjer, tangencijalni i linearizujući konus su različiti:
$$\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(x^*) = \mathbb{R}^2_+, \quad \mathcal{K}(x^*, \mathcal{G}) = \mathbb{R}^2.$$

25. Linearna funkcija ekstreme dostiže na vrhovima konveksnog kompaktnog skupa. Dobijamo da je

$$x^* = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0).$$

Inače, KKT uslovi su ispunjeni uz $u^* = (\frac{\sqrt{5}}{8}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0)$.

26. Funkcija $f(x) = \sum_{k=1}^{n} kx_k^2$ je konveksna, $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, i $\mathbf{0} \in \mathcal{G}$, pa je $x^* = \mathbf{0}$.

Inače da bi se dobio zadatak diferencijabilne optimizacije dovoljno je prvo ograničenje drukčije zapisati:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k - 1 \leq 0, \quad \text{i} \quad -\sum_{k=1}^{n} x_k - 1 \leq 0.$$

Tada, za odgovarajuću Lagranžovu funkciju $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$L(x, u, v, \mathbf{u}) = -u - v + \sum_{k=1}^{n} (kx_k + u - v - u_k) x_k$$

KKT uslovi su ispunjeni sa $x = \mathbf{0}, u = v = 0, \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Na primjer, jasno je da nije $u\,v \neq 0$. Ako je $u \neq 0, v = 0$, slijedi

$$2kx_k + u - u_k = 0, \ (k = \overline{1, n}) \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 1.$$

Odavde je

$$2kx_k^2 + ux_k = u_k x_k = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{n} 2kx_k^2 + u = 0,$$

što je nemoguće. Slično je i sa $u = 0, \ v \neq 0$.
Za $u = v = 0$ dobija se redom za sve $k = \overline{1, n}$

$$2kx_k = u_k, \quad 2kx_k^2 = u_k x_k = 0, \quad x_k = 0.$$

27. Dopustivi skup možemo zapisati kao $\mathcal{G} = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, x \rangle \leq 1\}$. Sada Lagranžova funkcija glasi

$$L(x, \alpha) = \sum_{i=1}^{m} \|x - v^i\|^2 + \alpha(\langle x, x \rangle - 1).$$

KKT uslovi postaju

$$\sum_{i=1}^{m}(x - v^i) + \alpha x = \mathbf{0},$$
$$\alpha(\|x\|^2 - 1) = 0,$$
$$\alpha \geq 0, \|x\| \leq 1.$$

Stavljajući da je $\quad v^0 = \dfrac{v^1 + \cdots + v^m}{m}, \quad$ dobijamo za prvu jednačinu

$$(m + \alpha)x = mv^0.$$

U slučaju da je $\|v^0\| \leq 1$, uzimajući da je $\alpha = 0$ dobijamo KKT tačku $\big(v^0, 0\big)$. Ako je $\|v^0\| > 1$, onda mora biti $\alpha > 0$, $\|x\| = 1$ (druga jednačina) i
$\|v^0\| = \dfrac{\alpha + m}{m}$, tako da je $\left(\dfrac{v^0}{\|v^0\|}, m(\|v^0\| - 1)\right)$ odgovarajuća KKT tačka.
Jasno, ovo je zadatak konveksne optimizacije pa je njegovo optimalno rješenje

$$x^* = \begin{cases} v^0, & \|v^0\| \leq 1 \\ \dfrac{v^0}{\|v^0\|}, & \|v^0\| > 1. \end{cases}$$

28. Neka je

$$f(x) = 15x_1 + 48x_2,$$
$$g_1(x) = \frac{5}{x_1} + \frac{9}{x_2} - \frac{17}{20}, \quad g_2(x) = -x_1, \quad g_3(x) = -x_2.$$

Sve ove funkcije su konveksne

$$(\quad \nabla^2 g_1(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{10}{x_1^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{18}{x_2^3} \end{bmatrix} \quad \text{je PsemiD matrica na} \quad \mathcal{G}),$$

ispunjen je Slejterov uslov

$$(\text{na primjer} \quad g(50, 90) = [-\frac{13}{20}, -50, -90]^\top < \mathbf{0}),$$

pa su KKT uslovi potrebni i dovoljni za postojanje rješenja. Dakle, treba riješiti sistem:

$$15 - \frac{5}{x_1^2}\, y_1 - y_2 = 0, \quad 48 - \frac{9}{x_2^2}\, y_1 - y_2 = 0,$$

$$y_1(\frac{5}{x_1}+\frac{9}{x_2}-\frac{17}{20})=0, \quad y_2x_1=0, \quad y_3x_2=0,$$
$$y\geq \mathbf{0}, \quad x\in\mathcal{G}.$$

Kako $(0,x_2),(x_1,0)\notin\mathcal{G}$, mora biti $y_2=y_3=0$, pa i $y_1\neq 0$. Dobijamo

$$3x_1^2=y_1, \quad 16x_2^2=y_1, \quad \frac{5}{x_1}+\frac{9}{x_2}=\frac{17}{20},$$

odakle je

$$3x_1=4x_2, \quad \frac{5}{x_1}+\frac{9}{x_2}=\frac{17}{20}, \quad \text{i} \quad x_{\text{opt}}=(20,15).$$

Jasno, mogli smo odmah isključiti drugo i treće ograničenje, kao neaktivna.

29. $f(x)=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}-2, \quad \nabla f(x)=\mathbf{1}-\dfrac{2}{x_1^2+x_2^2}\begin{bmatrix} x_2^2 \\ x_1^2 \end{bmatrix},$

$$\nabla^2 f(x)=\frac{4}{(x_1+x_2)^3}\begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}[x_2,-x_1].$$

Sada vidimo da je

$$\langle\nabla^2 f(x)v,v\rangle=\frac{4}{(x_1+x_2)^3}(x_1v_2-x_2v_1)^2\geq 0$$

na skupu
$$\{x\in\mathbb{R}^2|x_2>-x_1\}\supset\mathcal{G}.$$

Dakle, KKT uslovi su potrebni i dovoljni za postojanje globalnog minimuma.
Kako $\nabla f(x)=\mathbf{0}\Rightarrow x_1=x_2$, to je $x_1=0$. Ovo nije moguće, pa $x^*\notin \text{int}\mathcal{G}$.
Vidimo da su uslovi sljedeći: $\quad x\in \text{bd}\mathcal{G}, \quad y\gneqq\mathbf{0}$,

$$1-2(\frac{x_2}{x_1+x_2})^2+y_1-3y_2-y_3=0, \quad 1-2(\frac{x_1}{x_1+x_2})^2+3y_1-4y_2-y_4=0,$$

$$y_1(x_1+3x_2-9)=0, \ y_2(3x_1+4x_2-12)=0, \ y_3x_1=0, \ y_4x_2=0.$$

Prvo, oni nisu ispunjeni za $x=(0,3)$ pošto bi bilo $y_4=0$,
$-1+y_1-3y_2-y_3=0, \quad 1+3y_1-4y_2=0,$ odnosno $4+5y_2+3y_3=0$,
što nije moguće zbog $y\geq\mathbf{0}$. Dakle, $x_1\neq 0$ i $y_3=0$.
Mora biti i $y_4=0$, inače je $x_2=0$, $-1+3y_1=4y_2+y_4$, te $y_1\neq 0, x_1=9$.
Sada je $y_2=0$, ali i $y_1=-1$.
Ostaje:

(a) $y_1 = 0, y_2 \neq 0$, tj. $3x_1 + 4x_2 = 12$, što sa $1 + 6(\dfrac{x_1}{x_1+x_2})^2 = 8(\dfrac{x_2}{x_1+x_2})^2$ daje $x_1 = \frac{48}{5}\sqrt{2} - 12 \approx 1.576$, $x_2 = 12 - \frac{36}{5}\sqrt{2} \approx 1.818$, $y_2 \approx 0.242$,
$f(x_{\text{opt}}) = 120\sqrt{2} - 170 \approx -0.294$.

(b) $y_2 = 0$, $y_1 \neq 0$ ne treba analizirati, budući da ako x_{opt} pripada duži čiji su krajevi tačke $(9,0), (0,3)$, onda optimalna tačka (zbog konveksnosti f) postoji i u int$\mathcal{G}$.

30. $L(x,u)=$

$(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1)-u_1x_1+u_2(x_1-x_2)+u_3(x_2-x_3)+u_4(x_1+x_2+x_3-3)$.

KKT uslovi su:

$$\begin{gathered}
(x_3-x_2)(2x_1-x_2-x_3)-u_1+u_2+u_4=0,\\
(x_3-x_1)(x_1-2x_2+x_3)-u_2+u_3+u_4=0,\\
(x_2-x_1)(-x_1-x_2+2x_3)-u_3+u_4=0,\\
u_1x_1=0,\ u_2(x_1-x_2)=0,\ u_3(x_2-x_3)=0,\\
u_4(x_1+x_2+x_3-3)=0,\\
\mathbf{u}\geq\mathbf{0},\ x\in\mathcal{G}.
\end{gathered}$$

Kako je

$$V(x_1,x_1,x_3) = V(x_1,x_2,x_2) = 0,$$

mora biti

$$x_1 \neq x_2 \quad \text{i} \quad x_2 \neq x_3, \quad \text{tj.} \quad u_2 = u_3 = 0.$$

Takođje je $u_1 = 3u_4$ i $u_1 \neq 0$ (slijedi i $u_4 \neq 0$), te je $x_1 = 0$, $x_2 + x_3 = 3$. Sada se dobija

$$x_3(x_3 - 2x_2) = x_2(2x_3 - x_2)$$

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{2\dfrac{x_3}{x_2} - 1}{\dfrac{x_3}{x_2} - 2}\ .$$

Iz

$$\frac{x_3}{x_2} \in \{2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\},$$

zbog $x_3 \geq x_2$, $x_2 + x_3 = 3$ slijedi $x_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$. Dakle,

$$V\left(0, \frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} = V_{\text{opt}}.$$

31. Sedlaste tačke funkcije

$$L(x,u) = x_2x_3 + \frac{1}{x_1x_2x_3} + u_0(x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4) - u_1x_1 - u_2x_2 - u_3x_3$$

naći ćemo među KKT tačkama polaznog problema. Jedina takva tačka je

$$(x^0, u^0),\ x^0 = (2, 1, \frac{1}{2}),\ u^0 = (\frac{1}{4}, 0, 0, 0).$$

Nejednakost

$$L(x^0, u) \leq L(x^0, u^0)$$

je trivijalna, dok se

$$L(x^0, u^0) \leq L(x, u^0)$$

svodi na

$$x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + \frac{4}{x_1x_2x_3} \geq 10.$$

Imamo

$$x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + \frac{4}{x_1x_2x_3} \geq 6\sqrt[3]{(x_1x_2x_3)^2} + \frac{4}{x_1x_2x_3},$$

a funkcija

$$t \to \varphi(t) = 6\sqrt[3]{t^2} + \frac{4}{t}$$

ima minimum

$$\varphi(1) = 10.$$

Napomenimo da (P) nije zadatak konveksnog programiranja

$$(\ g_1(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4 \quad \text{nije konveksna}),$$

a ni dopustivi skup nije kompaktan. Međutim, pošto je $(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0)$ sedlasta tačka, to je $x_{\text{opt}} = (2, 1, \frac{1}{2})$.

32. S obzirom da je ispunjen Slejterov uslov (uzeti npr. tačku $(8, 2, 5, 2)$), a ne postoji KKT tačka slijedi

$$\mathcal{G}_{\text{opt}} = \emptyset.$$

Za promjenu zadržimo funkciju cilja, a ograničenja izmjenimo tako da je

$$x_4 \geq 0 \quad \text{umjesto } x_4 > 0.$$

Sada su aktivna ograničenja

$$x_3 + x_4 \leq x_1, \quad x_2 + x_4 \leq x_3, \quad x_4 \geq 0.$$

U novom zadatku Karuš Kun Takerovi uslovi su

$$\frac{1}{2\sqrt{x_1}} - u_1 = 0,\ -\frac{2}{x_2^3} + u_2 = 0,\ u_1 - u_2 = 0,\ u_1 + u_2 - u_3 = 0,$$

$$u_1(-x_1 + x_3 + x_4) = 0,\ u_2(x_2 - x_3 + x_4) = 0,\ u_3 x_4 = 0.$$

Ako je $u_3 = 0$, onda je (prema četvrtom uslovu) $u_1 = 0$, tako da KKT tačke nema. Neka je $u_3 \neq 0, x_4 = 0$. Slijedi $2u_1 = u_3,\ u_1 = u_2,\ x_1 = x_2,\ x_1 = x_3$
i $x_1 = \dfrac{2}{\sqrt[5]{2}}$, pa je tačka

$$\left(\frac{2}{\sqrt[5]{2}}, \frac{2}{\sqrt[5]{2}}, \frac{2}{\sqrt[5]{2}}, 0\right)$$

moguće rješenje novog zadatka, a da li je vidite sami.

33. Neprekidna funkcija data sa $f(x) = -x_1^2 - x_2$ ima tačku minimuma na kompaktnom skupu

$$\mathcal{G} = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x) \leq \mathbf{0}\}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} -x_1^2 - (x_2-1)^2 - 1 \\ (x_1+1)^2 + x_2^2 - 1 \\ -x_1 - 1 \end{bmatrix}.$$

Analizirajući odgovarajuće KKT uslove:

$$2x_1(y_2 - y_1 - 1) + 2y_2 - y_3 = 0,\ 2x_2(y_2 - y_1) + 2y_1 - 1 = 0,$$

$$y_1(x_1^2 + x_2^2 - 2x_2) = 0$$
$$y_2(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1) = 0$$
$$y_3(x_1 + 1) = 0,$$
$$y \geq \mathbf{0},\ g(x) \leq \mathbf{0},$$

dobijamo da KKT tačke (x, y) su

$$(0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0) \quad \text{i} \quad (-1, 1, t, \frac{1}{2}, 2 + 2t),\ t > 0.$$

Pri tome skup $\mathcal{G}$ nije regularan u $(-1,1)$. Ovdje na dovoljne uslove optimalnosti ne možemo računati, uključujući i to da dobijene tačke nisu sedlaste za Lagranžovu funkciju. Međutim, vidimo da iz

$$x_2 \leq 1, \quad -1 \leq x_1 \leq 0,$$

slijedi

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2 \geq -2 = f(-1,1),$$

dok $(0,0)$ nije tačka lokalnog minimuma, pošto je

$$\mathcal{G} \ni (-\frac{1}{n}, 0) \to (0,0), \quad \text{ali} \quad f(-\frac{1}{n}, 0) < f(0,0).$$

Zaključno,

$$x_{\text{opt}} = (-1,1).$$

34. Dopustivi skup je dat sistemom linearnih nejednačina. Odredićemo minimum funkcije $-f(x_1, x_2)$. Nije teško vidjeti da je jedino aktivno ograničenje

$$4x_1 + 5x_2 \leq 60.$$

KKT uslovi se redukuju na

$$\begin{aligned} -x_2 + 4y_3 &= 0 \\ -x_1 + 5y_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 60. \end{aligned}$$

Slijedi da je

$$(x^*, y^*) = (7.5, 6, 0, 0, 1.5, 0, 0)$$

jedina KKT tačka. Funkcija $-f$ je pseudokonveksna na $\mathcal{G} \bigcap \mathbb{R}_+^2$ pa je $(7.5, 6)$ tačka njenog globalnog minimuma na tom skupu. Maksimum polazne funkcije iznosi 45.

Napomenimo da je dovoljan uslov optimalnosti drugog reda u ovom problemu

$$\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v, v \rangle < 0, \quad \text{za sve} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}, \; v_1 = -\frac{5}{4} v_2.$$

35. $L(x, y) =$

$$(x_1-2)^2+(x_2-1)^2+(x_3-5)^2+(x_4-4)^2+y_1(x_1-x_2)+y_2(x_2-x_3)+y_3(x_3-x_4).$$

KKT uslovi su

$$\begin{aligned} 2(x_1-2)+y_1 &= 0, \quad y_1(x_1-x_2)=0,\\ 2(x_2-1)-y_1+y_2 &= 0, \quad y_2(x_2-x_3)=0,\\ 2(x_3-4)-y_2+y_3 &= 0, \quad y_3(x_3-x_4)=0,\\ 2(x_4-4)-y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Posmatrane funkcije su konveksne, f je strogo konveksna, pa rješenje problema je jedinstveno. Iz sistema slijedi

$$x_1+x_2+x_3+x_4=12.$$

Za $y_1 \neq 0$, $y_2=0$, $y_3 \neq 0$ je $x_1=x_2$, $x_3=x_4$. Sada iz $x_3+x_4=9$ izlazi $x^*=(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{9}{2},\frac{9}{2})$, $y^*=(1,0,1)$, tako da je $d(x^*,\mathcal{G})=1$.

36. Neka je $\mathcal{P}$ dati poliedar. Za traženu projekciju $x^*=pr(e^2)$ vrijedi

$$\|e^2-x^*\| = \min_{x\in\mathcal{P}} \sqrt{x_1^2+(x_2-1)^2}.$$

Budući da je korjenska funkcija rastuća dovoljno je riješiti problem kvadratne minimizacije:

$$\min\ x_1^2+(x_2-1)^2, \quad x\in\mathcal{P}=\{x\in\mathbb{R}_+^2 | x_1+3x_2\geq 3, 3x_1+2x_2\geq 6, -x_1+x_2\leq 1\}.$$

KKT uslovi su

$$\begin{gathered} 2x_1-y_2-3y_2-y_3-y_4=0,\\ 2(x_2-1)-3y_1-2y_2+y_3-y_5=0,\\ y_1(3-x_1-3x_2)=0,\ y_2(6-3x_1-2x_2)=0,\ y_3(-x_1+2x_2-1)=0,\\ y_4x_1=0,\ y_5x_2=0, y\geq \mathbf{0}, x\in\mathcal{P}. \end{gathered}$$

Mora biti $x_1\neq 0$, zato što $(0,x_2)\notin\mathcal{P}$. Sada je $y_4=0$. Ako bi bilo $x_2\neq 0$, onda je (peta jednačina) $y_3=0$, a to ne može zbog drugog uslova. Znači, $x_2\neq 0$, i $y_5=0$. Ako je $y_1\neq 0$, nije $y_3\neq 0$ (dobija se $(x_1,x_2)=(0,1)$), ali nije ni $y_3=0$ (bilo bi $2(x_2-1)\geq 0$, i $x_1=3(1-x_2)\leq 0$.) Prema tome, $y_1=0$.
Uslovi su sada:

$$\begin{gathered} 2x_1-3y_2-y_3=0,\\ 2x_2-2y_2+y_3=2,\\ y_2(6-3x_1-2x_2)=0,\ y_3(x_1-2x_2+1)=0. \end{gathered}$$

Ovdje je $5y_2=2x_1+2x_2$, tako da izlazi $y_2\neq 0$ i $3x_1+2x_2=6$.
Pri $y_3\neq 0$ dobijamo $x_1=\frac{4}{5}$, $x_2=\frac{9}{5}$, $y_2=\frac{21}{25}$, $y_3=-\frac{23}{25}<0$.

Preostaje, $y_3 = 0$ i zaključno imamo $x^* = (\frac{12}{13}, \frac{21}{13})$, $y^* = (0, \frac{8}{13}, 0, 0, 0)$.

$$P_{\mathcal{D}}(e^2) = (\frac{12}{13}, \frac{21}{13}).$$

37. Slejterov uslov je očigledno ispunjen, tako da je potrebno naći KKT ta čke. Posljednje ograničenje nije aktivno, tako da uz $x \in \mathcal{G}$, $\lambda \geq \mathbf{0}$, preostali KKT uslovi su:

$$\frac{7x_2 + 2}{(3x_1 + x_2 + 2)^2} = 3\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 + \lambda_4, \ \frac{-7x_1 - 4}{(3x_1 + x_2 + 2)^2} = \lambda_1 - 4\lambda_2 + 3\lambda_3,$$

$$\lambda_1(7 - 3x_1 - x_2) = 0, \quad \lambda_2(-x_1 + 4x_2 - 5) = 0,$$
$$\lambda_3(4x_1 - 3x_2 - 17) = 0, \quad \lambda_4 x_1 = 0.$$

Iz drugog uslova je $\lambda_2 \neq 0$, pa je $x_1 = 4x_2 - 5$. Mora da bude $x_1 \neq 0$ (jer $(0, \frac{5}{4}) \notin \mathcal{G}$), kao i $\lambda_4 = 0$. Sada, iz prve dvije jednakosti, nakon sabiranja, izlazi $\frac{3}{169(x_2 - 1)^2} = \lambda_1 - \lambda_3$, odakle (zbog $\lambda \geq 0$) je $\lambda_1 \neq 0$. Dakle,

$$x_1 = \frac{23}{13}, \ x_2 = \frac{22}{13}, \quad \text{pri čemu je} \quad \lambda_1 = \frac{1}{27}, \ \lambda_2 = \frac{7}{117} \quad \text{i} \quad \lambda_3 = 0.$$

Funkcija cilja f nije konveksna na $\mathcal{G}$, što vidimo iz npr.

$$2f(\frac{\frac{17}{4} + \frac{23}{13}}{2}, \frac{22}{26}) \nleq f(\frac{17}{4}, 0) + f(\frac{23}{13}, \frac{22}{13}),$$

ali zbog njene pseudokonveksnosti (količnik dvije linearne funkcije, druga pozitivna na $\mathcal{G}$), KKT uslovi su i dovoljni, te je $f(\frac{23}{13}, \frac{22}{13}) = -\frac{7}{39}$ globalni minimum.

Problemi ove vrste efikasno se rješavaju na sljedeći način. Smjenom

$$y_0 = \frac{1}{3x_1 + x_2 + 2}, \quad y_1 = y_0 x_1, \quad y_2 = y_0 x_2$$

zadatak postaje :

$$\min \ y_1 - 2y_2, \ y \in \mathbb{R}^2_+$$
$$3y_1 + y_2 \geq 7y_0, \quad 4y_1 - 3y_2 \geq 17y_0,$$
$$-y_1 + 4y_2 \leq 5y_0, \quad 3y_1 + y_2 + 2y_0 = 1,$$

odnosno,

$$\min y_1 - 2y_2$$
$$27y_1 + 9y_2 \geq 7, \quad 59y_1 + 11y_2 \leq 17,$$
$$13y_1 + 13y_2 \leq 5, \quad y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,$$

Možemo koristiti simpleks metodu. Uvodeći izravnavajuće promjenljive, i uzimajući

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 27 & 9 & -1 & 0 & 0 \\ 59 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 13 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 27 & 9 & 0 \\ 59 & 11 & 1 \\ 13 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

vidimo da bazna matrica B zadovoljava početni uslov simpleks metode, pošto

$$\mathrm{B}^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & 0 & -\frac{1}{26} \\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{3}{26} \\ -\frac{8}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{117} \\ \frac{22}{117} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

Test vektor je

$$t^\top = c_{\mathrm{B}}^\top \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A} - c^\top = [\ 0, 0, -\frac{1}{6}, 0, -\frac{7}{26}\ ]^\top \leq \mathbf{0},$$

pa je $y^* = (\frac{23}{117}, \frac{22}{117})$. Pošto je $y_0 = \frac{1}{9}$ to je opet $x^* = (\frac{23}{13}, \frac{22}{13})$.

38. $\nabla^2 q(x) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, funkcija q je strogo konveksna, g_1, g_2 su konveksne, ispunjen je Šlejterov uslov, te su KKT uslovi potrebni i dovoljni.Pri tome je optimalna tačka jedinstvena. KKT uslovi su:

$$2\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 5 \\ x_1 + x_2 - 5 \end{bmatrix} + 2u_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$u_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0, \quad u_2(3x_1 + x_2 - 6) = 0, \quad x \in \mathcal{G}, \quad u \geq \mathbf{0}.$$

Za $u = \mathbf{0}$ dobije se globalni minimum od q, ali on nije u dopustivom skupu $\mathcal{G}$. Ako je $u_1 = 0, u_2 \neq 0$ izlazi $x_1 + 2x_2 = 10$ iz datog sistema, i $3x_1 + x_2 = 6$.

Dobija se tačka $[\ \frac{2}{5}, \frac{24}{5}\ ]^\top$, opet van $\mathcal{G}$. Za $u_1 \neq 0, u_2 = 0$ imamo $(1 + u_1)x_1 = u_1 x_2$, što sa $x_1^2 + x_2^2 = 5$ daje $u_1 = 1$, te je

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

39. Ako problem ima rješenje x^* onda, na osnovu teoreme F. Džona , postoje broj u_0 i vektori u^1, u^2 za koje vrijedi:

$$u_0 F(x^*) + u_0 \frac{\partial F}{\partial x}(x^*)x^* - \frac{\partial F}{\partial x}(x^*)u^1 - u^2 = \mathbf{0},$$
$$\langle u^1, F(x^*)\rangle = 0,\ \langle u^2, x\rangle = 0,\ (u_0, u^1, u^2) \gneqq \mathbf{0}.$$

Sada nakon množenja prve jednačine vektorom $u_0 x - u^1$ dobijamo

$$\langle \frac{\partial F}{\partial x}(x^*)(u_0 x - u^1), u_0 x - u^1 \rangle + u_0^2 \langle F(x^*), x^* \rangle + \langle u^1, u^2 \rangle = 0.$$

Svi sabirci, po pretpostavkama, su nenegativni tako da moraju biti jednaki 0. Prema tome je

$$u_0^2 \langle F(x^*), x^* \rangle = 0.$$

Ako je $u_0 = 0$, onda zbog $\langle u^1, u^2\rangle = 0$, i $u^1 \geq \mathbf{0}$, $u^2 \geq \mathbf{0}$, imamo $(u_0, u^1, u^2) = \mathbf{0}$, što je nemoguće.
Dakle, $u_0 \neq 0$ tako da je

$$\langle x^*, F(x^*)\rangle = 0.$$

Obratno :

$$\langle x^*, F(x^*) \rangle = 0,\ x \geq \mathbf{0},\ F(x) \geq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \langle x, F(x) \rangle \geq 0 = \langle x^*, F(x^*)\rangle.$$

40. Dati skup $\mathcal{G}$ je ograničen ako zadatak

$$\max\|x\|, \quad x \in \mathcal{G}$$

ima rješenje. Birajući euklidsku normu dobijamo zadatak kvadratnog programiranja. Za normu $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, uvažavajući nenegativnost promjenljivih imamo zadatak linearnog programiranja:

$$\langle \mathbf{1}, x\rangle \to \max, \quad \mathrm{A}x = b, x \geq \mathbf{0}.$$

Polazni problem ima rješenje ako je dopustivi skup dualnog zadatka neprazan. Dakle, $\mathcal{G}$ je ograničen ako i samo ako postoji $v \in \mathbb{R}^m$ takav da je

$$\mathrm{A}^\top v \geq \mathbf{1}.$$

41. Za kanonski zadatak linearnog programiranja

$$\min c^\top x, \quad \mathrm{A}\, x \geq b, \quad x \geq \mathbf{0}$$

dualan je

$$\max y^\top b, \quad \mathrm{A}^\top y \leq c, \quad y \geq \mathbf{0}.$$

Ako su x^0, y^0 optimalne tačke datih problema, prema teoremi jake dualnosti mora biti

$$\langle c, x^0 \rangle = \langle y^0, b \rangle,$$

tako da iz $\mathrm{A}^\top y^0 \leq c$ redom slijedi

$$\langle \mathrm{A}^\top y^0, x^0 \rangle \leq \langle c, x^0 \rangle, \quad \langle y^0, \mathrm{A}x^0 \rangle \leq \langle y^0, b \rangle, \quad \langle y^0, \mathrm{A}x^0 - b \rangle \leq 0.$$

Nejednakost suprotna posljednjoj je očigledna, pa je

$$\langle y^0, \mathrm{A}x^0 - b \rangle = 0.$$

Isto se postupa i za

$$\langle \mathrm{A}^\top y^0 - c, x^0 \rangle = 0.$$

Obratno, uslov

$$\langle \mathrm{A}x^0 - b, y^0 \rangle = \langle \mathrm{A}^\top y^0 - c, x^0 \rangle,$$

i jednakost

$$\langle \mathrm{A}x^0, y^0 \rangle = \langle x^0, \mathrm{A}^\top y^0 \rangle$$

povlače

$$\langle b, y^0 \rangle = \langle c, x^0 \rangle.$$

Dalje, iz $y^\top \mathrm{A} \leq c^\top$ slijedi $y^\top \mathrm{A}x \leq c^\top x$, za sve $x \geq \mathbf{0}$, a zbog $\mathrm{A}x \geq b$ i $y \geq \mathbf{0}$ imamo $y^\top b \leq y^\top \mathrm{A}x$, odakle je

$$g(y) = y^\top b \leq y^\top \mathrm{A}x \leq c^\top x = f(x).$$

Specijalno, za sve dopustive x, y vrijedi

$$g(y) \leq f(x^0) = g(y^0), \quad f(x^0) = g(y^0) \leq f(x).$$

42. Smjenom $x_1 = -\xi_1,\ \xi_1 \geq 0$ zadatak postaje

$$\min \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + 0\xi_4$$

$$\begin{aligned} -1\xi_1 - \ 1\xi_2 + \ 2\xi_3 + \ 0\xi_4 &= 1 \\ -2\xi_1 + \ 2\xi_2 + \ 0\xi_3 + \ 1\xi_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$\xi_1 \geq 0,\ \xi_2 \geq 0,\ \xi_3 \geq 0,\ \xi_4 \geq 0.$$

Njemu je dualan sljedeći zadatak:

$$\begin{aligned} &\max\ \eta_1 + 3\eta_2 \\ &-1\eta_1 - 2\eta_2 \leq 1 \\ &-1\eta_1 + 2\eta_2 \leq 2 \\ &2\eta_1 + 0\eta_2 \leq 3 \\ &0\eta_1 + 1\eta_2 \leq 0 \end{aligned}$$

On se lako rješava grafički i optimalna tačka je $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Jasno, minimalna vrijednost u polaznom problemu je $\frac{3}{2}$, a optimalni vektor se može naći, prema prethodnom zadatku, iz sistema

$$\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = \frac{3}{2}, \quad \left\langle \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0.$$

Dobijamo $\xi^0 = \left[0, 0, \frac{1}{2}, 0\right]^\top$, te je $x^0 = \left[0, 0, \frac{1}{2}\right]^\top$.

43. Kako je (P) problem konveksnog programiranja dualan problem (u Vulfovom smislu) glasi:

$$\max\ L(y,u), \quad \nabla_x L(y,u) = \mathbf{0}, \quad y \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}_+^{n+1}.$$

U ovom slučaju (D) je

$$\begin{gathered} \max\ y_1^2 + \cdots + y_n^2 + u_0(n - y_1 - \cdots - y_n) - u_1 y_1 - \cdots - u_n y_n, \\ 2y_i - u_i - u_0 = 0,\ (i = \overline{1,n}),\ u \geq \mathbf{0}. \end{gathered}$$

Ovaj problem se svodi na

$$\max\ -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(u_i - u_0)^2 + nu_0, \quad u_0 \geq 0,\ u_i \geq 0.$$

Vidimo da dualan zadatak nije jednostavniji od polaznog. Za (P) KKT uslovi su, jasno, već dati u (D), tj. oni glase

$$2x_i - u_i - u_0 = 0,\ (i = \overline{1,n})$$

pri čemu još mora da vrijedi

$$u_i x_i = 0,\ u_0(n - x_1 - \cdots - x_n) = 0,\ u \geq \mathbf{0}.$$

Ako bismo za neki indeks i imali $u_i \neq 0$, onda je $x_i = 0$ i $u_0 = -u_i < 0$. Dakle, mora da bude $u = \mathbf{0}$, odakle je $x = \dfrac{u_0}{2}\mathbf{1}$. Iz $\mathbf{0} \notin \mathcal{G}$ izlazi

$$u_0 > 0, \quad \langle x, \mathbf{1} \rangle = n, \quad u_0 = 2, \quad \text{i} \quad x^* = \mathbf{1}.$$

Rješenje dualnog zadatka je $(1, \mathbf{1})$.

44. Dualan zadatak glasi:

$$\begin{gathered}
\max\ y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n \\
y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq 1 \\
y_2 + \cdots + y_n \leq 2 \\
\cdots\cdots \\
y_n \leq n \\
y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, ...,\ y_n \geq 0.
\end{gathered}$$

Jasno, sve nejednakosti sem prve su stroge, pa prema zadatku 41., zbog

$$\langle \mathrm{A}^\top y^0 - c, x^0 \rangle = 0,$$

mora da bude

$$x_2^0 = \cdots = x_n^0 = 0.$$

Slijedi da je

$$x_1^0 = n \quad \text{i} \quad x^* = (n, 0, \ldots, 0).$$

45.

$$\nabla^2 f(x,y) = 2 \begin{bmatrix} y-3 & x+y \\ x+y & x-3 \end{bmatrix}.$$

Za konveksnost funkcije f je potrebno da bude $y \geq 3,\ x \geq 3$. Međutim, tada je $(y-3)(x-3) < (x+y)^2$, pa $\nabla^2 f$ nije PsemiD matrica na $\mathbb{R}^2_+$.

S obzirom da je dopustivi skup kompaktan, postoji tačka minimuma date funkcije. Mi ćemo je naći među KKT tačkama, pošto vrijedi Slejterov uslov. Imamo sistem

$$\begin{gathered} y^2+2xy-6x-u_1+u_2-u_3=0, \\ x^2+2xy-6y-u_1+u_2-u_4=0, \\ u_1(1-x-y)=0,\ u_2(x+y-6)=0,\ u_3x=0,\ u_4y=0. \end{gathered}$$

U slučaju da je $xy \neq 0$ imamo $u_3=u_4=0$. Iz prve dvije jednačine je $y^2-x^2+6(y-x)=0$, odnosno $x=y$. Sistem postaje

$$3x^2-6x-u_1+u_2=0$$

$$u_1(1-2x)=0, \quad u_2(x-3)=0,$$

tako da KKT tačke su

$$(2,2,0,0,0,0) \quad \text{i} \quad (3,3,0,3,0,0).$$

Uzimajući da je $xy=0$ dobijaju se i preostale KKT tačke:

$$(0,6,0,36,72,0) \quad \text{i} \quad (6,0,0,36,0,72).$$

Sada se može odrediti

$$f_{\min}=-108, \quad f_{\max}=0.$$

46. Dualan problem je

$$\sup_{u\geq \mathbf{0}} \varphi(u), \quad \varphi(u)=\inf_{x\in\mathbb{R}^2} L(x,u).$$

Funkcija $x \to L(x,u)$ je konveksna na $\mathbb{R}^2$, za svaki (fiksiran) vektor $u \geq \mathbf{0}$, pa se tačke minimuma, odnosno vrijednosti funkcije φ dobiju iz jednačine

$$\begin{bmatrix} -e^{-x_1}-u_1+u_3 \\ -2e^{-x_2}-u_2+u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Sada, za $-u_1+u_3>0$, i $-u_2+u_3>0$, dobijamo

$$x_1=-\ln(-u_1+u_3), \quad x_2=-\ln\frac{-u_2+u_3}{2}.$$

Dakle,

$$\varphi(u)=\begin{cases} (u_1-u_3)\ln(u_3-u_1)+(u_2-u_3)\ln(u_3-u_2)+\ln 2u_3, & u_3>\max\{u_1,u_2\} \\ -\infty, & u_3\leq \max\{u_1,u_2\}\,. \end{cases}$$

Zaključno, (D) glasi

$$\begin{gathered} \max:(u_1-u_3)\ln(u_3-u_1)+(u_2-u_3)\ln(u_3-u_2)+\ln 2\,u_3, \\ u\in\mathcal{U}=\{u\in\mathbb{R}^3_+ |\ u_3\mathbf{1}\geq u\}. \end{gathered}$$

47. Ocjenu minimuma $f(x^*)$ možemo dobiti iz teoreme slabe dualnosti:

$$f(x) \geq \varphi(u), \quad \text{za sve} \quad (x,u) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R}_+^{n+1}.$$

Kako je

$$u^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \nabla f(x^0) \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

dobijamo ocjenu

$$f(x^*) \geq \varphi(u^0),$$

odnosno

$$f(x^*) \geq \inf_y L(y, u^0).$$

Kako je, u našem slučaju, funkcija $y \to L(y, u^0)$

$$L(y,u^0) = f(y) + \langle \begin{bmatrix} 0 \\ \nabla f(x^0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \langle \mathbf{1}, y \rangle - 1 \\ -y \end{bmatrix} \rangle = f(y) - \langle y, \nabla f(x^0) \rangle,$$

konveksna, za određivanje njenog infimuma iskoristićemo Fermaovu teoremu. Imamo

$$\nabla_x L(y, u^0) = \nabla f(y) - \nabla f(x^0),$$

odakle je očigledno

$$\nabla_x L(x^0, u^0) = \mathbf{0}, \quad \text{i} \quad \varphi(u^0) = L(x^0, u^0).$$

Slijedi

$$f(x^*) \geq f(x^0) - \langle x^0, \nabla f(x^0) \rangle.$$

Na drugi način, zbog $\nabla f(x^0) \geq \mathbf{0}$, imamo da je

$$\min_{x \in \sigma^n} \langle \nabla f(x^0), x \rangle = \langle \nabla f(x^0), \mathbf{0} \rangle = 0.$$

Iz konveksnosti funkcije f na $\mathbb{R}^n$ slijedi

$$f(x) - f(x^0) \geq \langle \nabla f(x^0), x \rangle - \langle \nabla f(x^0), x^0 \rangle,$$

pa za sve $x \in \sigma^n$ važi nejednakost

$$f(x) \geq f(x^0) - \langle \nabla f(x^0), x^0 \rangle.$$

48. $\max -f^c(y),\ y\in\mathcal{D}=\{y\in\mathbb{R}^n|\langle y,x\rangle\geq 0\ \forall x\in\mathcal{K}\}.$

49. Ovo su zadaci konveksnog programiranja sa nediferencijabilnom funkcijom cilja f.
a) Prelazeći na dualan problem dobijamo jednodimenzionalan slučaj. Lagranžova funkcija glasi

$$L(x,u)=\sum_{i=1}^n|x_i-a_i|+u\sum_{i=1}^n x_i,\quad x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}.$$

Dalje je

$$\varphi(u)=\inf_x L(x,u)=\begin{cases} u\sum_{i=1}^n a_i, & |u|\leq 1\\ -\infty, & |u|>1.\end{cases}$$

Na primjer, za $|u|\leq 1$ imamo

$$L(x,u)=\sum_{i=1}^n(|x_i-a_i|+u(x_i-a_i))+u\sum_{i=1}^n a_i\geq u\sum_{i=1}^n a_i=L(a,u).$$

Dulan problem

$$\max\varphi(u),\quad -1\leq u\leq 1,$$

ima rješenje

$$u^*=\operatorname{sgn}\sum_{i=1}^n a_i,\quad \varphi(u^*)=|\sum_{i=1}^n a_i|.$$

Dakle,

$$f(x^*)=|\sum_{i=1}^n a_i|,$$

a koordinate tačke minimuma x^* dobijaju se iz sistema jednačina

$$\sum_{i=1}^n|x_i-a_i|=|\sum_{i=1}^n a_i|,\quad \sum_{i=1}^n x_i=0.$$

50. Primalni problem nema rješenje, budući da na skupu

$$\mathcal{G}=\{\,x\in\mathcal{D}\,|\,g(x)=-x_1\leq 0\,\}=[0,+\infty)\times[1,+\infty)$$

vrijedi

$$f(x) = x_1 + \frac{1}{x_2} > 0, \quad \text{i} \quad \lim_{t\to\infty} f(0,t) = 0.$$

Znači,

$$\pi = 0.$$

Funkcija f je konveksna, pa je odgovarajući dualan problem

$$\sup \varphi(u), \quad u \in \mathbb{R}^n_+,$$

pri čemu je

$$\varphi(u) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x,u), \quad L(x,u) = \max\{0, x_1 + \frac{1}{x_2}\} - ux_1.$$

Sada je

$$\varphi(u) = \begin{cases} 0, & 0 \le u \le 1 \\ -\infty, & 1 < u \end{cases}.$$

Dakle,

$$\delta = \varphi(u^*), \quad u^* \in [0,1].$$

Pošto za marginalnu funkciju p imamo $p(0) = \pi \in \mathbb{R}$, i dualan problem ima rješenje, to na osnovu teoreme jake dualnosti polazni problem je stabilan.

51. Pošto je $F(x, \mathbf{0}) \in \{0, +\infty\}$, to je $\min\limits_x F(x, \mathbf{0}) = 0$. Minimum se dostiže, na primjer, u tački $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, tako da je

$$\pi = 0.$$

Marginalna funkcija p_F, $p_F(y) = \inf_x F(x,y)$ dodijeljena problemu (P_F) glasi:

$$p_F(y) = \begin{cases} -1, & y_1 < 0 \\ 0, & y_1 = 0 \\ +\infty, & y_1 > 0. \end{cases}$$

Polazni problem nije stabilan zato što je $\partial p_F(\mathbf{0}) = \emptyset$:

$$\begin{aligned} \partial p_F(\mathbf{0}) &= \{\, y^0 \,|\, p_F(y) \ge p_F(\mathbf{0}) + \langle y^0, y\rangle, \,\forall y \,\} \\ &\subseteq \{\, y^0 \,|\, p_F(y) \ge \langle y^0, y\rangle, \,\forall y_1 < 0 \,\} \\ &= \{\, y^0 \,|\, -1 \ge \langle y^0, y\rangle, \,\forall y_1 < 0 \,\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Napomenimo da ako je $y_2^0 \neq 0,$ onda postoji vektor $y,\ y_1 < 0$ ortogonalan na $y^0,$ a za $y_2^0 = 0,\ y_1^0 > 0$ dovoljno je uzeti $y_1 = -\dfrac{1}{2y_1^0}.$
Izračunajmo δ. Iz jednakosti

$$F^c(\mathbf{0}, y) = p_F^c(y)$$

slijedi

$$F^c(\mathbf{0}, y) = \begin{cases} 1, & y_1 \geq 0,\ y_2 = 0 \\ +\infty, & \text{inače} \end{cases},$$

tako da je

$$\delta = \sup_y -F^c(\mathbf{0}, y) = -1.$$

52.

$$p(v) = \inf\{e^{-x_2} \mid (x_1, x_2) \in \mathcal{G}_v\},\ v \in \mathbb{R}.$$

Dopustivi skup

$$\mathcal{G}_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1 \leq v\}$$

je prazan za $v < 0,$ pa je $p(v) = +\infty.$ Za $v = 0$ vrijedi $\mathcal{G}_v = \{(x_1, 0) | x_1 \geq 0\}$, i $p(0) = 1.$ U slučaju da je $v > 0,$ imamo

$$(n, \sqrt{2vn}) \in \mathcal{G}_v, \quad \lim_n e^{-\sqrt{2vn}} = 0,$$

što sa $f(x) > 0$ povlači $p(v) = 0.$ Dakle,

$$p(v) = \begin{cases} +\infty, & v < 0 \\ 1, & v = 0 \\ 0, & v > 0. \end{cases}$$

Da bismo iskoristili Gejlovu teoremu odredimo $\partial p(0).$ Iz

$$p(v) - p(0) \geq s(v - 0), \quad \forall v \in \mathcal{D}(p),$$

slijedi da je

$$-1 \geq sv, \quad \text{za sve} \quad v > 0,$$

što je nemoguće. Znači da je $\partial p(0) = \emptyset,$ te problem nije stabilan.

53. Marginalna funkcija je data sa $p(v) = \min\limits_{x \in \mathcal{G}(v)} f(x)$, gdje je

$$\mathcal{G}(v) = \{\, v \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq v_1,\ x_1 + x_2^2 \leq v_2 \,\}.$$

Skup $\mathcal{G}(v) = \emptyset$, za $v_2 > \sqrt{v_1}$, pa je u tom slučaju $p(v) = +\infty$. Ostali dopustivi skupovi su konveksni i kompaktni, te linearna funkcija f ima minimum u njegovom vrhu. Dobija se

$$p(v_1, v_2) = \begin{cases} -\sqrt{v_1}, & v_1 + v_2 \leq -\frac{1}{4} \\ -\sqrt{\frac{-1-2v_2+\sqrt{1+4(v_1+v_2)}}{2}}, & -\frac{1}{4} - v_1 < v_2 < \sqrt{v_1} \\ 0, & v_2 = \sqrt{v_1} \\ +\infty, & v_2 > \sqrt{v_1} \end{cases}$$

Nije sasvim lako odrediti $\partial p(\mathbf{0})$. Zato ćemo za utvrđivanje stabilnosti iskoristiti činjenicu da konveksan problem koji ima rješenje x^* je stabilan ako i samo ako postoji u^* takav da je (x^*, u^*) KKT tačka. Ovdje je očigledno

$$x^* = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right),$$

dok za $u^* \geq \mathbf{0}$ mora da vrijedi

$$2x_1^* u_1^* + u_2^* = 0, \quad \text{i} \quad 1 + 2x_1^* u_1^* - 2x_2^* u_2^* = 0,$$

što ne može biti. Dakle, ovaj problem nije stabilan .

54. Može se odrediti marginalna funkcija p, pa onda njena konjugovana funkcija. Dobija se

$$p(y) = \begin{cases} 0, & y_1 \geq -1, y_2 \geq -1, y_3 \geq 0 \\ \dfrac{y_3^2}{2}, & \max\{-2\sqrt{1+y_1}, -2\sqrt{1+y_2}\} \geq -1, \\ & y_2 \geq -1, \leq y_3 < 0 \\ 2y_1 + y_3^2 + 2y_3\sqrt{1+y_1} + 2, & -2\sqrt{1+y_2} < y_3 \leq -2\sqrt{1+y_1} \\ 2y_2 + y_3^2 + 2y_3\sqrt{1+y_2} + 2, & -2\sqrt{1+y_1} < y_3 \leq -2\sqrt{1+y_2} \end{cases}$$

Odavde se vidi da je $Dom(p^{\,c}) = -\mathbb{R}_+^3$, tako da nećemo direktno određivati konjugovanu funkciju. Kako posmatramo problem konveksne minimizacije, imamo da je

$$p^{\,c}(-u) = -\varphi(u), \quad u \in \mathbb{R}_+^3,$$

pri čemu je

$$\varphi(u) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, u).$$

U ovom slučaju je

$$L(x,u) = x_1^2 + x_2^2 + u_1(x_1^2 - 1) + u_2(x_2^2 - 1) + u_3(x_1 + x_2), \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}^2.$$

Za $u \geq \mathbf{0}$, na $\mathbb{R}^2$ konveksna funkcija,

$$x \to (1 + u_1)x_1^2 + (1 + u_2)x_2^2 + u_3(x_1 + x_2) - u_1 - u_2$$

dostiže minimum u tački

$$(-\frac{u_3}{2(1 + u_1)}, -\frac{u_3}{2(1 + u_2)}),$$

tako da dobijamo

$$p^{\ c}(u) = \frac{u_3^2}{4}(\frac{1}{1 - u_1} + \frac{1}{1 - u_2}) - u_1 - u_2.$$

Sada možemo odrediti traženi subdiferencijal, tj. skup

$$\{ s \in \mathbb{R}^3 \,|\, p^{\ c}(u) - p^{\ c}(\mathbf{0}) \geq \langle s, u - u^0 \rangle, \quad \forall u \leq \mathbf{0} \}.$$

Iz

$$p^{\ c}(u) \geq \langle s, u \rangle,$$

slijedi

$$\frac{u_3^2}{4}(\frac{1}{1 - u_1} + \frac{1}{1 - u_2}) \geq \langle s + e^1 + e^2, u \rangle, \quad u \leq \mathbf{0}.$$

Jasno, vrijedi

$$\{ s \,|\, s_1 \geq -1,\, s_2 \geq -1,\, s_3 \geq 0 \} \subseteq \partial p^{\ c}(\mathbf{0}).$$

U tačnost obrnute inkluzije uvjeravamo se uzimajući da je redom

$$u = -e^1, \quad -e^2, \quad te^3 \, (t \to 0_+).$$

Do rezultata smo mogli doći i pomoću relacije

$$s \in \partial p^c(\mathbf{0}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{0} \in \partial p(s).$$

Izvori i kraj

1. Skoro svi rezultati za konveksne skupove (tijela i konuse) u konačno dimenzionim euklidskim prostorima potiču od H. Minkovskog.

2. Tuy, Hoang:
Convex Analysis and Global Optimization,
Kluwer, Dordrecht, 1998.

3. Suharev, A.G., Timohov, A.V., Fedorov, V.V. :
Kurs metodov optimizaciji, Nauka Moskva, 1986.

4. Problem je složeniji bez pretpo stavki za skup $\mathcal{C}$. Tada se može koristiti sljedeće([41.]). Ako je

$$\sup_{x\in \mathcal{A}} \langle c, x\rangle = \sup_{x\in \mathcal{B}} \langle c, x\rangle$$

za sve vektore c, onda je

$$\mathrm{cl}\,\mathrm{co}\mathcal{A} = \mathrm{cl}\,\mathrm{co}\mathcal{B}.$$

Pri tome treba imati na umu:

$$\sup_{x\in \mathcal{A}} \langle c, x\rangle = \sup_{x\in \mathrm{co}\mathcal{A}} \langle c, x\rangle =$$

$\sup_{x\in \mathrm{cl}\mathcal{A}} \langle c, x\rangle$. Nakon toga dovoljno je pokazati da je

$$\sup_{x\in \mathcal{K}(\mathbf{0},1)} \langle c, x\rangle = \|c\|.$$

5. Klasičan primjer. Na primjer u Rockafellar, R. Tyrrell:
Convex Analysis, Princeton,1997.

6. Zangwill, Willard I.:
NonlinearProgramming
Prentice-Hall, New Jersey, 1969.

7. ?

8. ©([23])

9. Ova konveksna funkcija javlja se u primjenjenoj matematici, na primjer u teoriji mehanike fluida. ([19])

10. Za konkavnost geometrijske i harmonijske sredine može se koristiti uslov konkavnosti pozitivno homogenih funkcija, međutim i tada se mora koristiti nejednakost Koši- Bunjakovskog.

11. Alekseev, V.,M. , Galeev,∃.M, Tihomirov, V.M.:
Sbornik zadach po optimizacii
Nauka, Moskva, 1984.

12. Elster, K-H., Reinhardt, R., Schäuble, M., Donath, G.:
Einführung in die nichtlineare optimierung Teubner, Leipzig, 1977.

13. Uopšte vrijedi da je f^c diferencijabilna, ako je f strogo konveksna funkcija. ([18]).

14. ?

15. Ako je funkcija pozitivno homogena onda je njena konjugovana jednaka nuli na svom domenu

16. Uopšte

$$f(x) = \frac{\|x - x^1\|}{\|x - x^2\|}$$

je kvazikonveksna funkcija na poluprostoru

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \|x - x^1\| \le \|x - x^2\|\}.$$

Boyd, Stephen, Vanderberghe, Lieven:
Convex Optimization
Cambridge University Press, 2004.

17. ?

18. Hiriart-Urruty, J.B. , Lemarechal, C.: *Convex Analysis and Minimization Algorithms II*. Springer, Berlin, 1993 .

19. Drugi dio zadatka vrijedi i ako je

$$f(x) \geq 0, \text{ za } \text{ sve } x \in \mathcal{K}$$

Korablev, A. I.: O proizvodnih po napravlenijam kvazivipuklih funkcionalov, 1975.

20. Konveksnost kompozicije funkcija izučio je već Jensen (1906), dok su uopštenja za kvazikonveksne funkcije data u Fenchel,W.: *Convex Cones Sets and Functions*. Princeton Univ. 1953

21. Ovo uopštenje Fermaove teoreme dokazao je Hiriart-Urruty,J.B. : When is a point x satisfying $\nabla f(x) = 0$ a global minimum of f ? Amer. Math. Monthly **93**(1986) 556-558.
Primjetimo da za funkcije konveksne i diferencijabilne na $\mathbb{R}^n$ drugi uslov je ispunjen, tako da je tada

$$f(x^*) = \min f(x) \Leftrightarrow \nabla f(x^*) = \mathbf{0}.$$

22. Pšeničnij, B.N.: Vipuklij analiz i ekstremalnije zadači, Nauka, Moskva, 1980.

Fenchel,W.[21],88-105.

23. Ognjanović, S. Borwein, Jonathan M., Lewis, Adrian S.: *Convex Analysis and Nonlinear Optimization* Springer, New York, 2000.

24. ?

25. ?

26. ?

27. ?

28 Cameron, Neil: *Introduction to Linear and Convex Programming* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

29. Problem je približno riješen u J. Kaška, M. Pišek: Kvadraticko-linearni lomene programovani, Ekon.-matem. obzor, 2(1966)169-173.

30. Specijalan slučaj ($n = 3$) problema iz Malozemov, V. N., Shemiakina, I. V.: Maximization of the Vandermonde determinant and the Laguerre polynomials, Metody vychislenii Vol 19.(2001)140-153.

31. varijanta problema iz [32]

32. Peressini, A. L., Sullivan, F. E., Uhl, J. J.: *The Mathematics of Nonlinear Programming*, Springer, 1988.

33. ?

34. kao [38]

35. ?

36. ?

37. Kalihman, I. L.: *Sbornik zadač po matematičeskom programirovaniju*, Moskva,1975.

38. Jahn, Johannes: *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization* Springer,Berlin,1994.

39. Vajda, S.: *Theory of Linear and Nonlinear Programming.* Longman, London, 1974.

40. ?

41. Uporediti sa $u^\top g(x) = \mathbf{0}$ u KKT uslovima. To su uslovi ravnoteže (*equilibrium condition*) linearnog programiranja , ili *complementary slackness conditions* [36].

42. ?

43. ?

44. ?

45. ?

46. ©

47. ?

48. Avriel, Mordecai: *Nonlinear Programming* Prentice-Hall, New Jersey, 1977.

49. Vasilev, F.P.:*Metodi Optimizacii*, Faktorial Press, Moskva,2002.

50, kao [3]

51. Rockafellar, R. T. : Duality and stability in extremum problems involving convex functions, Pacific J. Math.,**21**(1967), 167-187.

52. Primjer je dao Duffin, Richard J.,

53. ©

54. ©