LEKCIJE IZ ELEMENTARNE GEOMETRIJE

BANJA LUKA, 2010.

Sadržaj:

vi

LEKCIJA 1

Prva lekcija

1.1 O Euklidovim "Elementima".

Geometrija je (zajedno sa aritmetikom) prva oblast matematike koja je (iz čisto praktičnih razloga) zanimala ljude. Najranija znanja iz geometrije su kolekcija zapažanja o dužinama, uglovima, površinama, itd .... Neka od tih znanja su bila vrlo komplikovana: verzije Pitagorine teoreme, zapremina zarubljene piramide, neke vrste trigonometrijskih tablica....
Takođe, znanja iz geometrije su ljudima pomagala da razumiju svijet oko sebe

- Aristotel i brod-zemlja je okrugla
- Eratosten i štap-obim zemlje

Smatra se da je Tales iz Mileta prvi koji je "osjetio potrebu" da dokazuje geometrijska tvrđenja.

- visina piramide
- ugao nad prečnikom je prav
- Ako paralelne prave sijeku ugao pOq u tačkama A, B odnosno C i D tada je
$$\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}.$$

Njegov učenik je Pitagora, za kojeg se smatra da nije smislio teoremu koja nosi njegovo ime, ali da ju je prvi dokazao. Dalje, Pitagora je "otkrio" nesamjerljive duži i iracionalne brojeve.

TEOREMA 1.1. *Površina kvadrata nad hipotenuzom je ravna zbiru površina kvadrata nad katetama.*

DOKAZ. Neki dokazi Pitagorine teoreme

- Dokaz pomoću površina
- Dokaz pomoću sličnosti
- Dokaz Euklida
- Dokaz ”rasjecanjem”

□

Vrijedi i ”obrnuta” Pitagorina teorema.

TEOREMA 1.2. *Stranice trougla $\triangle ABC$ su a, b i c. Ako vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$, tada je $\triangle ABC$ pravougli.*

U izgradnji neke naučne teorije nije moguće sve tvrdnje dokazati i sve pojmove definisati. Prećutno prihvatamo neke tvrdnje za istinite i nazivamo ih aksiome; takođe za neke pojmove “smatramo” da je potpuno očigledno šta znače. Takvi pojmovi se nazivaju osnovni pojmovi.

Sve ostale pojmove čiji sadržaj definišemo nazivamo izvedenim. Takođe, sva tvrđenja koja nisu aksiome potrebno je dokazati pomoću pravila izvođenja i ranije dokazanih tvrđenja i aksioma. Te dokazane tvrdnje se nazivaju teoreme. Ovakav način zasnivanja neke oblasti naziva se deduktivni ili aksiomatski. Bilo je više pokušaja da se znanja iz geometrije uobliče kao deduktivna teorija. No, rasprava sa naslovom Elementi, Euklida iz Aleksandrije je najuspješniji, najuticajniji, najznačajniji i najčitaniji udžbenik ikad napisan (u bilo kojoj nauci!). Jedina knjiga u istoriji sa više izdanja je Biblija. I danas, skoro 2 500 godina od nastanka, Elementi su dio literature kursa iz geometrije.

U trinaest knjiga Elemenata, Euklid je postupno izložio sva geometrijska znanja iz tog vremena. Prvih šest knjiga se bavi planimetrijom, naredne četiri se bave geometrijskom teorijom brojeva, a poslednje tri se odnose na stereometriju.

Prva knjiga Elemenata počinje sa 23 definicije kojima se uvode osnovni pojmovi. U nekoj deduktivnoj teoriji, svi pojmovi se ne mogu definisati. Ovo razumjeti je teško jednako kao i shvatiti činjenicu da se ne mogu sva tvrđenja u nekoj deduktivnoj teoriji dokazati. Euklid je to primjetio, i osnovna tvrđenja geometrije izlaže u pet postulata i devet aksioma.

Kakva je razlika između postulata i aksioma?

Postulati su tvrđenja koja se uglavnom odnose na geometriju, dok većina aksioma vrijedi (i primjenjuje se) i u drugim oblastima matematike.
Primjeri:

Postulat: Od tačke do tačke se može povući prava linija.

Aksioma: Ako se jednakim (veličinama) doda jednako, onda će i rezultat biti jednak.

Danas - skoro nikakva. Tako da mi danas govorimo samo o aksiomama.

(**peti postulat**) Svaki put kada prava pri presjeku sa dvije druge prave obrazuje uglove sa iste strane, čiji je zbir manji od dva prava ugla, te prave se sijeku sa one strane sa koje je taj zbir uglova manji od dva prava.

Previše komplikovan. Da li je možda to posljedica ostalih postulata i aksioma?

1.2 Osnovni pojmovi u geometriji.

Već u Hilbertovim Osnovama geometrije, pojmovi tačka, prava i ravan se ne definišu. Osnovni pojmovi u geometriji koji se ne definišu su:

- neprazan skup S (koji nazivamo prostor, a njegovi elementi su tačke);
- klasa $\mathcal{P}$ podskupova od S (čije elemente nazivamo prave);
- klasa $\mathcal{R}$ podskupova od S (čije elemente nazivamo ravni).

Pored njih, ne definišu se i dvije osnovne relacije:

(1) **relacija između** relacija poretka tačaka na pravoj;

$$A - B - C \text{ čitamo tačka } B \text{ je između tačaka } A \text{ i } C$$

(2) **relacija podudarnosti** $(A, B) \cong (C, D)$ čitamo par tačaka (A, B) je podudaran paru (C, D).

Odnosi između osnovnih pojmova i ovih relacija se opisuju aksiomama. Te aksiome danas dijelimo u pet grupa: aksiome incidencije, aksiome rasporeda, aksiome podudarnosti, aksiome neprekidnosti i aksioma paralelnosti.

Geometrija zasnovana na prve četiri grupe aksioma se naziva apsolutna geometrija. U zavisnosti da li za aksiomu paralelnosti odaberemo Plejferovu ili aksiomu Lobčevskog, dobijamo euklidsku ili hiperboličku geometriju.

1.3 Aksiome incidencije i njihove posljedice.

Za nekoliko tačaka kažemo da su **kolinearane** ako sve pripadaju jednoj pravoj; inače su **nekolinearne**. Dalje, nekoliko tačaka je **koplanarno** ako sve pripadaju jednoj ravni; inače su **nekoplanarne**. Takođe, nekoliko pravih je koplanarno ako sve pripadaju jednoj ravni; inače su nekoplanarne. Dvije nekoplanarne prave nazivamo **mimoilaznim.** Nekoliko pravih ili ravni nazivamo **konkurentnim** ako je njihov presjek jedna tačka.

Lik ili **figura** je neprazan podskup skupa tačaka.

Aksiome incidencije

$I1$ Svaka prava sadrži najmanje dvije različite tačke

$I2$ Postoji bar jedna prava koja sadrži dvije proizvoljne tačke

$I3$ Postoji najviše jedna prava koja sadrži dvije proizvoljne tačke

$I4$ Svaka ravan sadrži najmanje tri nekolinearne tačke

$I5$ Postoji najmanje jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke

$I6$ Postoji najviše jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke

$I7$ Ako dvije tačke neke prave pripadaju nekoj ravni, tada sve tačke te prave pripadaju toj ravni.

$I8$ Ako dvije različite ravni imaju jednu zajedničku tačku, tada one imaju još jednu zajedničku tačku.

$I9$ Postoje četiri nekoplanarne tačke.

Iz aksioma incidencije ne možemo zaključiti da postoji više od četiri tačke, šest pravih i četiri ravni! Neke očigledne posledice aksioma incidencije:

- Postoji jedinstvena prava koja sadrži dvije različite tačke; pravu određenu sa tačkama A i B označavaćemo sa $p(AB)$, ili manje formalno, AB
- Postoji jedinstvena ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke; ravan određenu sa tačkama A, B i C označavaćemo sa $\pi(ABC)$, ili sa ABC
- Postoji jedinstvena ravan koja sadrži pravu i tačku koja joj ne pripada; ravan određenu sa pravom a i tačkom A označavaćemo sa $\pi(aA)$, ili sa aA

- Postoji jedinstvena ravan koja sadrži dvije različite prave koje se sijeku; ravan određenu sa pravim a i b označavaćemo sa $\pi(ab)$, ili sa ab
- Postoje dvije mimoilazne prave
- Presjek dvije različite prave je najviše jedna tačka
- Presjek ravni i prave koja ne pripadatoj ravni je najviše jedna tačka.

TEOREMA 1.3. *Ako dvije različite ravni imaju jednu zajedničku tačku, onda se one sijeku po pravoj.*

Silvesterov problem:
U ravni je zadano n tačaka koje nisu sve na istoj pravoj. Dokaži da postoji prava koja sadrži tačno dvije od zadanih tačaka!

1.4 Zadaci

ZANIMLJIVI ZADACI

1. Oko ekvatora je namotan konopac. Nakon toga, konopac je prosiren za jedan metar i ponovo omotan oko ekvatora, tako da se centar tog novog kruga podudara sa središtem zemlje. Da li između konca i zemlje može da se provuče miš?
2. Da li postoji n-tougao sa četiri oštra ugla?
3. Da li postoji konveksan poliedar u kojem sve strane imaju različit broj ivica?
4. Nađi zbir uglova na slici (3×1 pravougaonik)
5. Da li je moguće kocku podijeliti na manje kockice tako da sve te male budu različitih ivica

PITAGORINA TEOREMA

1. U trouglu $\triangle ABC$ tačka E je na visini AD. Dokaži da je tada
$$\overline{AC}^2 - \overline{CE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2.$$
Dokaži da tvrđenje vrijedi i ako je tačka E "iza" D. Šta se desi ako je tačka E "ispred" tačke A?

2. Između stranica $AB = 7$ i $AC = \sqrt{50}$ u trouglu $\triangle ABC$ je ugao od $135°$. Odredi stranicu BC.

   Nađi opštu formulu za BC kada su dužine stranica AB i AC proizvoljne. Nađi opštu formulu kada je taj ugao $120°$ i $150°$.

3. U četverouglu $ABCD$ je $AB = 9, BC = 12, CD = 13, DA = 14$, i dijagonala $AC = 15$. Normale iz B i D na AC sijeku AC u P i Q, tim redom. Nađi PQ.

AKSIOME INCIDENCIJE

1. Dokaži da postoje bar dvije mimoilazne prave!

2. Neka je $\mathcal{F}$ neka familija pravih. Ako se svake dvije prave iz $\mathcal{F}$ sijeku, dokaži da su sve prave iz $\mathcal{F}$ konkurentne ili koplanarne!

3. Tačka C pripada pravoj AB. Dokaži da su ravni određene sa ABD i ACD iste.

4. Date su dvije mimoilazne prave p i q i tačka A. Da li uvijek postoji prava koja sadrži A i koja siječe prave p i q? Da li mogu postojati dvije takve prave?

LEKCIJA 2

Druga lekcija

2.1 Aksiome rasporeda i posljedice.

Gaus- 1832. g. prvi primjetio da raspored tačaka na pravoj treba opisati aksiomama. Prvi je opisao Moris Paš 1882. g.

Aksiome rasporeda opisuju osnovna svojstva relacije $A - B - C$ "biti između".

Aksiome rasporeda

$R1$ Ako je $A - B - C$ tada su A, B i C tri različite kolinearne tačke

$R2$ Ako je $A - B - C$ tada je i $C - B - A$

$R3$ Ako je $A - B - C$ tada nije i $A - C - B$

$R4$ Ako su A i B dvije različite tačke tada postoji tačka C takva da je $A - B - C$

$R5$ Ako su A, B i C tri kolinearne tačke tada je ili $A - B - C$ ili $B - C - A$ ili $C - A - B$

$R6$ **Pašova aksioma:** Ako su A, B i C tri nekolinearne tačke i p prava u ravni ABC koja ne sadrži A, siječe BC u tački D tako da je $B - D - C$, tada prava p siječe CA u tački Q tako da je $C - Q - A$ ili p siječe AB u tački R tako da je $A - R - B$.

TEOREMA 2.1. *Za kolinearne tačke A, B, C vrijedi tačno jedna od relacija*

$$A - B - C \text{ ili } B - C - A \text{ ili } C - A - B.$$

POSLEDICA 2.2. *Ako su A i B različite tačke, tada tačka X pripada pravoj AB ako i samo ako je $X = A$ ili $X = B$ ili $X - A - B$ ili $A - X - B$ ili $A - B - X$.*

TEOREMA 2.3. *Ako su A i B različite tačke tada postoji tačka C tako da je $A - C - B$.*

Za konačan skup kolinearnih tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kažemo da je linearno uređen ako je $A_i - A_j - A_k$ za sve $1 \leq i < j < k \leq n$. To zapisujemo sa

$$A_1 - A_2 - \cdots - A_n.$$

Takođe je tada i $A_n - A_{n-1} - \cdots - A_1$.

TEOREMA 2.4. *Ako je*

$$A - B - C \text{ i } B - C - D \text{ tada je i } A - B - C - D.$$

TEOREMA 2.5 (bez dokaza). *Ako je*

$$A - B - C \text{ i } A - C - D \text{ tada je i } A - B - C - D.$$

TEOREMA 2.6 (bez dokaza). *Ako je*

$$A - B - C \text{ i } A - B - D \text{ tada je } A - B - C - D \text{ ili } A - B - D - C.$$

TEOREMA 2.7 (Silvester). *Ako n tačaka ravni ne pripada jednoj pravoj, tada postoji prava koja sadrži tačno dvije od tih tačaka.*

Rješenje Silvesterovog problema pomoću udaljenosti. DZ: Lučić: Silvester iz rasporeda.

2.2 Duž-Poligon-Poluprava-Poluravan-Poluprostor

Zatvorena duž AB (ili $\overline{AB}$ ili $[AB]$) je skup svih tačaka koje su između tačaka A i B, uključujući i njih. Tačke A i B su krajevi duži. Na sličan način definišemo i otvorene, odnosno poluotvorene duži.

Geometrijski lik je podskup ravni. Za lik Φ kažemo da je konveksan ako Φ sadrži sve tačke svih duži čiji krajevi pripadaju Φ

TEOREMA 2.8. *Presjek proizvoljne familije konveksnih likova je konveksan lik.*

DEFINICIJA 2.9. Neka je O tačka na pravoj p. Ako su A i B tačke sa te prave (različite od O), i ako nije $A - O - B$ kažemo da su tačke A i B sa iste strane tačke O i pišemo $A, B \ddot{-} O$. Inače, kažemo da su A i B sa raznih strana tačke O i to označavamo sa $A, B \div O$.

TEOREMA 2.10. *Relacija sa iste strane tačke O je relacija ekvivalencije. Skup svih ostalih tačaka prave p (osim tačke O) se razloži na dvije klase ekvivalencije.*

Otvorena poluprava je jedna od tih klasa ekvivalencije, a tačka O je tjeme poluprave. Polupravu određenu sa tačkom A označavamo sa $[OA)$ ili OA.

Neka je dat skup $n+1$ tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$.
Poligonska linija $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$ je skup koji se sastoji od duži $A_1A_2,\ A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}$. Tačke $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ su tjemana, a duži $A_1, A_2,\ A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}$ su stranice poligonske linije.

Ako su tačke A_1 i A_{n+1} iste, a neka tri uzastopna tjemena nisu kolinearna $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}$ je zatvorena poligonska linija (poligon ili mnogougao), inače je poligonska linija otvorena. Dijagonala u poligonu je duž koja spaja dva nesusjedna tjemena.

Poligonska linija- povezanost u Euklidskoj geometriji.
Poligon sa n ivica se naziva n-tougao. Poligon je složen ako neke dvije njegove ivice imaju zajedničkih tačaka (osim eventualno tjemena); inače je prost.

DEFINICIJA 2.11. Neka je p prava u ravni π i neka su A i B tačke iz π koje ne leže na p. Ako p ne siječe duž AB kažemo da su tačke A i B sa iste strane prave p i pišemo $A, B \ddot{-} p$. Inače, kažemo da su A i B sa raznih strana prave p i to označavamo sa $A, B \div p$.

TEOREMA 2.12 (bez dokaza). *Relacija sa iste strane prave p u ravni π je relacija ekvivalencije na $\pi \setminus p$, koja taj skup razloži na dvije klase ekvivalencije.*

Svaku od tih klasa nazivamo otvorena poluravan, a prava p je njena granica. Poluravan koja je određena sa pravom p i tačkom A označavaćemo sa $[pA)$.

DEFINICIJA 2.13. Neka je π ravan u prostoru. Ako su A i B tačke koje ne pripadaju π, i ako π ne siječe duž AB, kažemo da su tačke A i B sa iste strane ravni π i pišemo $A, B \ddot{-} \pi$. Inače, kažemo da su A i B sa raznih strana ravni π i to označavamo sa $A, B \div \pi$.

TEOREMA 2.14 (bez dokaza). *Relacija sa iste strane ravni π je relacija ekvivalencije koja skup $S \setminus \pi$ (sve tačke prostora osim onih koje su u π) razlaže na dvije klase ekvivalencije.*

Klase ekvivalencije su otvoreni poluprostori ograničeni sa π.
Ugaona linija je skup svih tačaka dvije zatvorene poluprave p i q sa zajedničkim tjemenom O. Poluprave p i q su kraci, a O je tjeme ugaone linije $\angle pq$. Ako je $\angle pq$ ugaona linija u ravni π, a A i B tačke te ravni koje nisu na ugaonoj liniji, definišemo relaciju "biti sa iste strane ugaone linije":

$$A, B \ddot{-} \angle pq \text{ akko postoji poligonska linija koja spaja } A \text{ i } B \text{ a ne siječe} \angle pq$$

TEOREMA 2.15 (bez dokaza). *Relacija $\ddot{-}$ je relacija ekvivalencije koja skup svih tačaka ravni π koje nisu u $\angle pq$ podjeli u dvije klase.*

Svaka od tih klasa se naziva ugao.

2.3 Aksiome podudarnosti

OVO JE IZOSTAVLJENO na PREDAVANJU

Aksiome podudarnosti opisuju osnovna svojstva relacije $\cong$ *"biti podudaran".*

Aksiome podudarnosti

$P1$ *Ako su* A, B, C, D *tačke takve da je* $(A, B) \cong (C, D)$ *i ako je* $A = B$ *tada je i* $C = D$

$P2$ *Za bilo koje dvije tačke* A *i* B *vrijedi* $(A, B) \cong (B, A)$

$P3$ *Ako su* A, B, C, D, E, F *tačke takve da je* $(A, B) \cong (C, D)$ *i* $(A, B) \cong (E, F)$ *tada je* $(C, D) \cong (E, F)$

$P4$ *Ako su* C *i* C' *tačke otvorenih duži* AB *i* AC *takve da je* $(A, C) \cong (A', C')$ *i* $(C, B) \cong (C', B')$ *tada je i* $(A, B) \cong (A', B')$

$P5$ *Ako su* A *i* B *dvije različite tačke i ako je* C *početak neke poluprave, tada na toj polupravoj postoji tačka* D *takva da je* $(A, B) \cong (C, D)$

$P6$ *Ako su* A, B, C *tri nekolinearne tačke i ako su* A' *i* B' *tačke na granici neke poluravni takve da je* $(A, B) \cong (A'B')$ *tada u poluravni postoji jedinstvena tačka* C' *tako da je* $(A, C) \cong (A'C')$ *i* $(B, C) \cong (B', C')$

$P7$ *Ako su* A, B, C *i* A', B', C' *dvije trojke nekolinearnih tačaka i ako su* D *i* D' *tačke na polupravim* BC *i* $B'C'$ *tako da vrijedi* $(A, B) \cong (A', B')$, $(A, C) \cong (A', C')$, $(B, C) \cong (B', C')$ *i* $(B, D) \cong (B', D')$ *tada je i* $(A, D) \cong (A', D')$

TEOREMA 2.16. *Podudarnost parova tačaka je relacija ekvivalencije.*

TEOREMA 2.17. *Ako su* A *i* B *dvije različite tačke i ako je* C *početak neke poluprave, tada na toj polupravoj postoji jedinstvena tačka* D *takva da je* $(A, B) \cong (C, D)$.

TEOREMA 2.18. *Ako su* A, B *i* C *različite tačke neke prave* p *i ako su* A' *i* B' *tačke prave* p' *takve da je* $(A, B) \cong (A', B')$*, tada postoji tačka* C' *tako da je* $(A, C) \cong (A', C')$ *i* $(B, C) \cong (B', C')$*. Dalje,* C' *leži na* p' *i raspred tačaka je sačuvan:*

- *ako je* $A - B - C$ *onda je* $A' - B' - C'$;
- *ako je* $B - C - A$ *onda je* $B' - C' - A'$;
- *ako je* $C - A - B$ *onda je* $C' - A' - B'$.

Ako su $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *i* $(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$ *dvije uređene* n*-torke tačaka i ako je* $(A_i, A_j) \cong (A'_i, A'_j)$ *za sve* i, j *reći ćemo da su te* n*-torke podudarne:*

$$(A_1, A_2, \ldots, A_n) \cong (A'_1, A'_2, \ldots, A'_n).$$

TEOREMA 2.19. *Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke neke ravni π i neka su A', B', C' tri nekolinearne tačke neke ravni π' takve da je $(A, B, C) \cong (A', B', C')$. Tada za svaku tačku X u ravni π postoji tačka X' takva da je $(A, B, C, X) \cong (A', B', C', X')$. Dalje, tačka X' je u ravni π' i ima isti položaj u odnosu na $A'B'$, $A'C'$ i $B'C'$ kao i tačka X u odnosu na prave AB, AC i BC.*

2.4 Izometrije

DEFINICIJA 2.20. Bijekcija $\mathcal{J}$ prave, ravni ili prostora na sebe koje čuva relaciju podudarnosti (za sve A i B je $(A, B) \cong (\mathcal{J}(A), \mathcal{J}(B)))$ je izometrija.

Uslov da je $\mathcal{J}$ bijekcija je suvišan.

TEOREMA 2.21. *Sve izometrije prave, ravni ili prostora obzirom na kompoziciju čine grupu.*

TEOREMA 2.22. *Izometrijom se prava slika u pravu, poluprava se slika u polupravu, a duž se slika u duž.*

TEOREMA 2.23 (bez dokaza). *Izometrijom se ravan slika u ravan, poluravan se slika u poluravan, a ugao se slika u ugao.*

I OVO JE IZOSTAVLJENO NA PREDAVANJU
Pojam orijentacije-intuitivno!

TEOREMA 2.24. *Izometrijom prave se istosmjerne duži slikaju u istosmjerne duži. Izometrijom ravni se istosmjerni trouglovi slikaju u istosmjerne trouglovi. Izometrijom prostora se istosmjerni tetraedri se slikaju u istosmjerne tetraedre.*

Dakle, ako izometrija prave (ravni, prostora) promjeni orijentaciju jednoj duži (trouglu, tetraedru) to uradi sa svima. Izometrije koje ne mijenjaju orijentaciju nazivamo direktne, a izometrije koje mijenjaju orijentaciju su indirektne.

TEOREMA 2.25. *Ako su A i B dvije različite tačke neke prave p, a A' i B' tačke te prave takve da je $(A, B) \cong (A', B')$, postoji jedinstvena izometrija prave p na samu sebe takva da se A i B slikaju u A' i B'.*

TEOREMA 2.26 (bez dokaza). *Ako su A, B i C tri nekolinearne tačke neke ravni π, a A', B' i C' tačke te ravni takve da je $(A, B, C) \cong (A', B', C')$, tada postoji jedinstvena izometrija ravni π na samu sebe takva da se A, B i C slikaju redom u A', B' i C'.*

TEOREMA 2.27 (bez dokaza). *Ako su A, B, C i D četiri nekoplanarne tačke , a A', B', C' i D' tačke takve da je $(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D')$, tada postoji jedinstvena izometrija prostora takva da se A, B, C i D slikaju redom u A', B', C' i D'.*

POSLEDICA 2.28. *Ako neka izometrija prave ima dvije fiksne tačke, onda je ona identiteta. Ako neka izometrija ravni ima tri nekolinearne fiksne tačke, onda je ona identiteta. Ako neka izometrija prostora ima četiri nekoplanarne tačke onda je ona identiteta.*

- OVO JESMO RADILI NA PREDAVANJU -

Paralelne prave- koplanarne prave koje se ne sijeku. Podudarnost uglova.

CTAB: Uglovi sa paralelnim kracima su ili podudarni ili suplementni.

CTAB: Unakrsni uglovi su podudarni.

CTAB: Uglovi sa normalnim kracima su podudarni ili suplementni.

TEOREMA 2.29. *Zbir unutrašnjih uglova u trouglu je jednak* $180°$.
Zbir unutrašnjih uglova u n-touglu je jednak $(n-2)180°$.
Zbir spoljnih uglova u n-touglu je jednak $360°$. *Spoljni ugao u trouglu je jednak zbiru dva unutrašnje njemu nesusjedna ugla.*

2.5 Zadaci

1. Dokaži da svaka prava ima beskonačno mnogo tačaka.

2. Koliko dijagonala ima konveksan mnogougao?

3. Kada je skup $\{A, B\}$ konveksan?

4. Dokaži da su simetrale dva suplementna ugla su normalne!

5. Odrediti ugao koji je od njemu suplementnog manji za onoliko za koliko je veći od njemu komplementnog?

6. Dokazati da su sve prave koje se nalaze u jednoj poluravni paralelne.

7. U $\triangle ABC$ tačke E i D su tačke na stranama AC i BC. Duž AF je simetrala ugla $\angle CAD$ a BF je simetrala $\angle CBE$. Dokaži da je
$$\angle AEB + \angle ADB = 2\angle AFB.$$

8. Ako su simetrale dva susjedna ugla ortogonalne, dokaži da su ti uglovi uporedni.

9. Dokaži da se svaki (ne nužno konveksan) n-tougao može dijagonalama podijeliti na trouglove.

LEKCIJA 3

Treća lekcija

3.1 Podudarnost trouglova

DEFINICIJA 3.1. Ugao koji je jednak svom uporednom naziva se pravi ugao. (i ostale definicije)

LEMA 3.2. *Za tačku A i pravu p u ravni π postoji jedinstvena prava n koja sadrži A i koja je normalna na p.*

Dva trougla u ravni $\mathbb{E}^2$ su podudarna ako postoji izometrija $\mathcal{I} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ kojom se jedan slika u drugi. Oznaka $\cong$. Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke i neka je $\mathcal{I} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ izometrija ravni. Ako je $\mathcal{I}(A) = A'$, $\mathcal{I}(B) = B'$ i $\mathcal{I}(C) = C'$, tada je

$$AB \cong A'B', AC \cong A'C', BC \cong B'C' \text{ i } \angle A \cong \angle A', \angle B \cong \angle B', \angle C \cong \angle C'$$

Stavovi o podudarnosti trouglova:

- **SSS**
- **SUS**
- **USU**
- **SSU**

TEOREMA 3.3. *U trouglu $\triangle ABC$ vrijedi*

$$\angle A = \angle B \Leftrightarrow BC = AC.$$

TEOREMA 3.4. *U trouglu $\triangle ABC$ vrijedi:*
naspram veće stranice se nalazi veći ugao i obrnuto.

TEOREMA 3.5. *Zbir dvije stranice trougla je uvijek veći od treće.*

TEOREMA 3.6. *Neka je B_1 središte stranice AC a C_1 središte stranice AB. Tada je B_1C_1 paralelna sa BC i $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$.*

DEFINICIJA 3.7. Simetrala duži. Simetrala ugla.

LEMA 3.8. *Tačka A leži na simetrali duži XY ako i samo ako je $AX \cong AY$. Tačka A leži na simetrali ugla ako i samo ako je jednako udaljena od krakova ugla.*

Vrste četverouglova. Za četverougao $ABCD$ kažemo da je

- paralelogram $AB||CD$ i $AD||BC$.

Tada je $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$.

TEOREMA 3.9. *Ekvivalentno je*

1. *$ABCD$ je paralelogram.*
2. *susjedni uglovi u $ABCD$ su suplementni.*
3. *parovi naspramnih stranica su podudarni.*
4. *$AB \cong CD$ i $AB||CD$*
5. *dijagonale AC i BD se polove.*

- kvadrat, pravougaonik
- romb, romboid
- trapez

3.2 Četiri značajne tačke u trouglu

- simetrala ugla
- simetrala stranice
- visina
- težisna duž

DZ: Kako se konstruišu?

TEOREMA 3.10. *Težisne duži trougla $\triangle ABC$ se sijeku u jednoj tački T. Ta tačka se naziva težiste trougla $\triangle ABC$. Težiste dijeli težišne duži u omjeru* $2:1$

$$AT : TA_1 = 2 : 1.$$

TEOREMA 3.11. *Simetrale stranica u trouglu se sijeku u jednoj tački O. Ta tačka je centar opisane kružnice.*

TEOREMA 3.12. *Simetrale uglova u trouglu se sijeku u jednoj tački S. Ta tačka je centar upisane kružnice.*

TEOREMA 3.13. *Visine u trouglu se sijeku u jednoj tački H. Ta tačka se naziva ortocentar.*

3.3 Zadaci

1. Gdje se nalazi centar opisane kružnice u pravouglom trouglu?

2. Dokaži da su dijagonale romba međusobno normalne.

3. Neka su P, Q, R, S polovišta stranica proizvoljnog četverougla $ABCD$. Dokaži da je $PQRS$ paralelogram.

4. U $\triangle ABC$ tačka D se nalazi na duži AC tako da je $AB = AD$. Ako je $\angle ABC - \angle ACB = 30°$ koliki je $\angle CBD$?

5. Dvije međusobno ortogonalne prave sijeku stranice kvadrata AB, BC, CD i AD u tačkama P, Q, R, S. Dokaži da je $PR \cong QS$.

6. Simetrala ugla $\angle ABC$ i simetrala vanjskog ugla C u $\triangle ABC$ se sijeku u D. Prava paralelna sa BC kroz tačku D siječe AC u L i AB u M. Ako je $LC = 5$ a $MB = 7$ koliko je LM?

   Šta se desi sa LM ako je $\triangle ABC$ jednakostraničan?

7. Ako je zbir duži koje spajaju središta naspramnih strana četverougla jednak poluobimu, taj četverougao je paralelogram. Dokazati!

8. U pravouglom trouglu $\triangle ABC$ duž CF je težisna duž na hipotenuzu, CE je simetrala pravog ugla a CD je visina. Dokaži da je $\angle DCE \cong \angle ECF$. Ako je $\angle DCE \cong \angle ECF$ dokaži da je $\triangle ABC$ pravougli.

9. Neka su AA', BB' i CC' visine u oštrouglom $\triangle ABC$. Dokaži da je ortocentar H trougla $\triangle ABC$ centar upisane kružnice u $\triangle A'B'C'$.

10. Tačka E se nalazi u kvadratu $ABCD$ tako da je $\angle EDC = \angle ECD = 15°$. Dokaži da je $\triangle ABE$ jednakostraničan!

LEKCIJA 4

Četvrta lekcija

4.1 Vektori u ravni

DEFINICIJA 4.1. Vektor=usmjerena duž. Nula vektor. Pravac, smjer i intenzitet. Dva vektora su jednaka ako su istog pravca, smjera i intenziteta.

Vektor $\overrightarrow{AB}$ je predstavnik svih usmjerenih duži koje su istog pravca, smjera i intenziteta.

Za proizvoljnu tačku X u prostoru postoji jedinstvena tačka Y takva da je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY}$.

Operacije sa vektorima (množenje vektora sa skalarom i sabiranje vektora ponoviti iz analitičke geometrije). Dvije važne činjenice:

- "Nadovezujući" vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ se može formirati trougao ako i samo ako je $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

- Za proizvoljne tačke A, B i C vrijedi

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$

Zadatak: Dokazati da se od težisnica trougla $\triangle ABC$ može konstruisati trougao.

4.2 O Talesovoj teoremi

DEFINICIJA 4.2 (Paralelna projekcija). Neka su p i q dvije prave u nekoj ravni i neka je t prava koja siječe i p i q. Ako je $P \in p$, sa P' označimo tačku na q u kojoj prava paralelna sa t siječe pravu q. Preslikavanje $P \mapsto P'$ se naziva paralelna projekcija p na q u pravcu prave t.

TEOREMA 4.3. *Paralelna projekcija je bijekcija. Paralelnom projekcijom se podudarne duži slikaju u podudarne.*

- Podjela duži u zadanom omjeru.

TEOREMA 4.4 (Tales). *Neka su p i q dvije koplanarne prave i neka su t_1, t_2, t_3 paralelne prave koje sijeku p u tačkama A, B, C i q u A', B', C'. Tada je*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Paralelna projekcija čuva odnos dužina disjunktnih duži.

POSLEDICA 4.5. *Dvije posljedice Talesove teoreme*

- *Neka se prave p i q sijeku u O $(p \cap q = O)$. Ako su presječene sa paralelnim pravim t_1 i t_2 u P_1, Q_1 odnosno P_2, Q_2 tada je*

$$\frac{OP_1}{OQ_1} = \frac{OP_2}{OQ_2}, \frac{OP_1}{P_1Q_1} = \frac{OP_2}{P_2Q_2}, \frac{OQ_1}{Q_1P_1} = \frac{OQ_2}{Q_2P_2}$$

- *Simetrala unutrašnjeg ugla dijeli naspramnu stranicu u odnosu u kojem su preostale dvije stranice.*

4.3 Slični trouglovi

Sličnost: Dvije geometrijske figure su slične ako se homotetijom (ravnomjernim smanjivanjem ili povećavanjem) od jedne može dobiti druga figura. Svi krugovi i svi kvadrati su slični. Sve elipse nisu slične.

DEFINICIJA 4.6. Za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ kažemo da su slični ako su im svi uglovi jednaki i sve stranice proporcionalne. Drugim riječima $\triangle ABC \simeq \triangle A'B'C'$ ako i samo ako je

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C' \text{ i } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Odnos odgovarajućih stranica u posmatranim trouglovima se naziva koeficijent sličnosti.

Podudarni trouglovi su slični.

Teoreme o sličnosti trouglova

- Ako su svi odgovarajući uglovi u dva trougla podudarni, ti trouglovi su slični.
- Ako su svi odgovarajuće stranice u dva trougla proporcionalne, ti trouglovi su slični.
- Dva trougla su slična ako su im proporcionalne dvije stranice, a uglovi između njih podudarni.
- Dva trougla su slična ako su im proporcionalne dvije stranice, a uglovi naspram veće od njih podudarni.

4.4 Zadaci

1. Koristeći vektore dokaži teoremu o srednjoj liniji u trouglu.

2. Neka su M, N, P, Q, R, S redom polovišta stranica nekog šestougla. Dokaži da je $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$.

3. Zbir četiri jedinična vektora je nula vektor. Dokaži da su ti vektori mogu podijeliti u dva para suprotnih vektora!

4. U $\triangle ABC$ je $DE||BC$,$FE||DC$, pri čemu je $D, F \in AB$, $E, G \in AC$. Ako je $AF = 4$ a $FD = 6$ nađi DB.

5. U $\triangle ABC$ tačka O ie polovište težišne duži BE. Prava AO siječe BC u D, a prava CO siječe AB u F. Ako je $CO = 15, OF = 5, AO = 12$, nađi OD. Odrediti vezu između AO i OD.

6. Na strani BC u $\triangle ABC$ je zadana tačka A_1 tako da je $BA_1 : A_1C = 2 : 1$. U kojem omjeru težišna duž iz tjemena C dijeli AA_1?

7. Duž BE dijeli $\triangle ABC$ na dva slična trougla sa koeficijentom $\sqrt{3}$. Odredi uglove u trouglu $\triangle ABC$.

8. U paralelogramu $ABCD$, tačka E je na duži BC. Prava AE siječe dijagonalu BD u tački G i pravu DC u tački F. Ako je $AG = 6$ i $GE = 4$, nađi EF.

9. Duž AB je podijeljena tačkama K i L tako da je $AL^2 = AK \cdot AB$. Duž AP je podudarna sa AL. Dokaži da je PL simetrala ugla $\angle KPB$.

10. U $\triangle ABC$, tačka D se nalazi na BA i vrijedi $BD : DA = 1 : 2$. Tačka E je na strani CB tako da je $CE : EB = 1 : 4$. Duži DC i AE se sijeku u F. Odrediti $CF : FD$.

LEKCIJA 5

Peta lekcija

5.1 O krugu i kružnici

DEFINICIJA 5.1.
- Kružnica sa centrom O i poluprečnikom r je skup svih tačaka u ravni koje su od tačke O udaljene tačno r.

$$k(O, r) = \{X \in \mathbb{E}^2\ d(O, X) = r\}$$

- Tetiva kružnice k je duž kojoj krajnje tačke leže na k.
- Prečnik je tetiva koja sadrži centar.
- Kružni luk, centralni i periferijski ugao.

TEOREMA 5.2. *Periferijskui ugao je jednak polovini centralnog ugla nad istim lukom.*

Posljedice ove teoreme su

- Svi periferijski uglovi nad istim lukom su jednaki.
- Ugao nad prečnikom je pravi.
- Ugao između tangente AB i tetive je jednak periferijskom uglu nad lukom AB.
- Centar opisane kružnice u $\triangle ABC$ je unutar trougla akko je trougao oštrougli; na polovini hipotenuze akko je $\triangle ABC$ pravougli a izvan trougla akko je $\triangle ABC$ tupougli.

Zadatak: Odrediti geometrijsko mjesto tačaka iz kojih se duž AB vidi pod uglom α.

5.2 Kružnica i mnogouglovi

Tangentni mnogougao=sve stranice dodiruju kružnicu.

TEOREMA 5.3. *Tangentne duži iz iste tačke su podudarne.*

Zadatak: Neka upisana kružnica dodiruje stranice AB, BC, CA u tačkama R, P, Q. Izrazi duži $AQ, \ldots, CQ$ preko stranica trougla a, b, c.

TEOREMA 5.4. *Četverougao $ABCD$ je tangentan akko su sume dužina naspramnih stranica jednake.*

Tetivni mnogougao=sva tjemena pripadaju kružnici.

TEOREMA 5.5. *Četverougao $ABCD$ je tetivan akko je suma naspramnih uglova jednaka* $180°$.

5.3 Potencija tačke obzirom na kružnicu

Neka je zadana kružnica $k(O, r)$ i neka je T tačka u ravni kružnice k. Ako prave p i q koje sadrže T sijeku k u P_1 i P_2, odnosno Q_1 i Q_2 . Tada je

$$TP_1 \cdot TP_2 = TQ_1 \cdot TQ_2.$$

Dakle, ovaj proizvod zavisi samo od tačke T i od kružnice, ne zavisi od prave. Tu vrijednost nazivamo potencija tačke T obzirom na kružnicu k. Potencija tčke obzirom na kružnicu je funkcija $\mathcal{P}t_{k(O,r)} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}$ definisana sa $\mathcal{P}t_{k(O,r)}(T) = OT^2 - r^2$

TEOREMA 5.6. *U $\triangle ABC$ vrijedi*

$$OS^2 = r^2 - 2r\rho$$

5.4 Zadaci

1. Dokaži da je u pravouglom trouglu zbir kateta jednak zbiru prečnika upisanog i opisanog kruga.

2. Neka je k pripisana kružnica za $\triangle ABC$ koja dodiruje stranicu BC i prave AB i AC. Odrediti dužinu tangentnih duži iz tačke A na kružnicu k.

3. Oko oštrouglog trougla $\triangle ABC$ je opisana kružnica k. Visine iz A, B, C sijeku k u tačkama M, N, P. Dokaži da je ortocentar trougla $\triangle ABC$ centar upisane kružnice za $\triangle MNP$.

4. Tangente AC i DB su normalne jedna na drugu i sijeku se u tački G. U $\triangle AGD$ visina iz G siječe AD u E, a kada se produži siječe BC u tački P. Dokaži da je $BP = PC$.

5. Tetive AB i CD su normalne i sijeku se u tački E. Ako je $AE = 2, EB = 12, CE = 4$ nađi udaljenost tačke E od kružnice.

6. Oko kvadrata $ABCD$ stranice a je opisan krug. Ako je E proizvoljna tačka na tom krugu odredi
$$AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2.$$

7. Četverougao $ABCD$ je upisan u kružnicu. Poznato je da dijagonala BD polovi AC. Ako je $AB = 10, AD = 12, DC = 11$, nađi BC.

8. Prava p siječe krug u dijametralno suprotnim tačkama A i C. Prava q siječe krug u tačkama B i D i pravu p u tački P izvan kruga. Na pravu q su povučene normale AE i CF. Ako je $EB = 2$, a $BD = 6$, odredi DF.

9. U krug je upisan jednakostraničan trougao $\triangle ABC$. Tačka M se nalazi na luku BC kojem ne pripada tačka A. Dokaži da je $MB+MC = MA$.

LEKCIJA 6

Šesta lekcija

6.1 Neke karakteristične teoreme

TEOREMA 6.1 (Simsonova prava). *Neka je P tačka na opisanoj kružnici oko $\triangle ABC$. Ako su A', B', C' podnožja normala i P na BC, CA i AB tada su te tačke kolinearne. Prava koja ih sadrži naziva se Simsonova prava.*

Zadatak: Tačke simetrične ortocentru obzirom na stranice trougla leže na opisanoj kružnici.
Tačke simetrične ortocentru obzirom na polovišta stranica trougla leže na opisanoj kružnici.

TEOREMA 6.2 (Ojlerova prava). *Ortocentar, težiste i centar opisane kružnice u $\triangle ABC$ leže na istoj pravoj, T je između H i O, i vrijedi $HT = 2TO$. Prava koja sadrži H, T, O se naziva Ojlerova prava.*

TEOREMA 6.3 (kružnica devet tačaka). *Središta stranica, podnožja visina i središta duži koje spajaju ortocentar sa tjemenima leže na kružnici kojoj je centar središte duži HO.*

TEOREMA 6.4 (Apolonius). *Ako je ta cka X na strani BC u $\triangle ABC$ takva da je $BX : CX = m : n$ onda je*

$$nAB^2+mAC^2 = nBX^2+mCX^2+(m+n)AX^2 = (m+n)(AX^2+BX\cdot CX)$$

TEOREMA 6.5 (Čeva). *Ako su P, Q iR tačke na stranicama BC, CA, AB u $\triangle ABC$ tada su prave AP, BQ i CR konkurentne ako i amo ako je*

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$$

TEOREMA 6.6 (Menelaj). *Neka su P, Q iR tačke na stranicama BC, CA, AB u $\triangle ABC$. Te tačke su kolinearne ako i amo ako je*

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$$

TEOREMA 6.7 (Ptolomej). *Ako je $ABCD$ tetivan četverougao tada je*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

6.2 zadaci

1. Dokaži da se presjek simetrale ugla i simetrale odgovarajuće stranice nalazi na opisanoj kružnici.

2. Neka su AA', BB' i CC' visine u $\triangle ABC$. Ako su P, Q, R i S podnožja normala iz A' na AB, AC, BB' i CC', dokaži da su te tačke kolinearne.

3. Neka je t_a težišna duž iz tjemena A. Ako su dužine stranica trougla a, b i c, dokaži da je
$$t_a^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

4. **Lajbnicova teorema:**
Ako je T težište trougla $\triangle ABC$, a P proizvoljna tačka u ravni tada je
$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = TA^2 + TB^2 + TC^2 + 3PT^2.$$

5. **Stjuardova teorema:**
Ako je X tačka na BC u $\triangle ABC$ tada je
$$BC \cdot AX^2 = BX \cdot AC^2 + CX \cdot AB^2 - BC \cdot CX \cdot BX.$$

6. **Karnoova teorema:**
Ako su P, Q, R tačke na stranicama BC, AC, AB u $\triangle ABC$, prave normalne na stranice trougla u tim tačkama su konkurentne ako i samo ako je
$$BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = 0.$$

7. Neka upisana kružnica dodiruje stranice BC, AC, AB u $\triangle ABC$ u P, Q, R. Dokaži da su AP, BQ i CR konkurentne.

8. **Dezargova teorema:**
Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ trouglovi u istoj ravni. Ako su P, Q i R redom presjeci pravih BC i $B'C'$, AC i $A'C'$ te AB i $A'B'$. Dokazati da su tačke P, Q i R kolinearne ako i samo ako su prave AA', BB' i CC' konkurentne.

LEKCIJA 7

Sedma lekcija-ponavljanje.

LEKCIJA 8

Osma lekcija

8.1 Poligoni

Definicije pojmova: poligonska linija, zatvorena poligonska linija, prosta poligonska linija.

TEOREMA 8.1 (bez dokaza). *Svaka zatvorena poligonska linija dijeli ravan na tačno dva dijela.*

Ograničen dio ravni sa poligonskom linijom se naziva **poligon**.
Napomena: Kako pogoditi da li je neka tačka ravni u unutrašnjosti ili nije?
Ako su poligoni P i Q takvi su njihove unutrašnjosti disjunktni skupovi, definišemo njihovu sumu $P + Q$ kao uniju ta dva poligona.

TEOREMA 8.2. *Svaki poligon se može napisati kao zbir trouglova u kojima su stranice jedino stranice ili dijagonale posmatranog poligona.*

Podjela poligona na način opisan u prethodnoj teoremi se naziva triangulacija bez dodatnih tjemena.

POSLEDICA 8.3. *Zbir unutrašnjih uglova u n-touglu je* $(n-2)\cdot 180°$.

Pravilni poligoni-definicija. Za svaki $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, postoji pravilan n-tougao. Polupravilan poligon (jednakoivični-sve ivice)